

代號：26620-26820
29420
頁次：3-1

108年公務人員高等考試三級考試試題

類 科：電力工程、電子工程、電信工程、醫學工程

科 目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50 分)

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、空間上有 $a = (1, 1, 1)$, $b = (3, 4, 5)$, $c = (2, 3, 4)$, $d = (1, 2, 2)$ 四點，求 $\overrightarrow{ab}$, $\overrightarrow{ac}$ 和 $\overrightarrow{ad}$ 三個向量作為三邊所組成平行四邊體的體積？(10 分)

二、假設路徑 C 是一逆時針的正方形邊界，其各邊位於直線 $x = \pm 2$ 和 $y = \pm 2$ 之上。請求出下列積分值：

(一) $\int_C \frac{\cos z}{z(z^2 + 8)} dz$ (7 分)

(二) $\int_C \frac{\cosh z}{z^4} dz$ (8 分)

三、利用積分因子，解微分方程式 $2\sin(y^2)dx + xycos(y^2)dy = 0$, $y(2) = \sqrt{\pi/2}$ 之解。(15 分)

四、設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(一)求 A 的特徵值 (eigenvalues) (5 分)

(二)求 A 的特徵向量 (eigenvectors) (5 分)

乙、測驗題部分：(50 分)

代號：2266

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆 在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 V 及 W 是有限維度的空間向量， T 為 $V \rightarrow W$ 的函數，下列敘述何者正確？

(A)若 $T(x+y) = T(x) + T(y)$ ，則 T 為線性變換

(B) T 為一對一函數，若且唯若 $N(T) = \{0\}$ ，其中 $N(T)$ 為 T 的 Null space

(C)若 T 為線性變換，則 $\text{nullity}(T) + \text{rank}(T) = \dim(V)$

(D)若 $x_1, x_2 \in V$ ， $y_1, y_2 \in W$ ，則必定存在一線性變換 $T: V \rightarrow W$ 使得 $T(x_1) = y_1$ 及 $T(x_2) = y_2$

- 2 試決定下列各個線性變換 T ，何者不是一對一線性變換？
 (A) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (y, x)$ (B) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, x - y)$
 (C) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x, y, x + y)$ (D) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x - y, y - x, 2x - 2y)$
- 3 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ ，試問 $\text{Rank}(A^T B)$ 為何？
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- 4 求 $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}^{100} = ?$
 (A) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$
- 5 線性轉換 $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $L(x, y, z) = (2x + 3y + z, 3x + 3y + z, 2x + 4y + z)$ ，試求其逆轉換為何？
 (A) $L^{-1}(x, y, z) = (-x + y, -x + z, 6x - 2y - 3z)$
 (B) $L^{-1}(x, y, z) = (-2x - 3y - z, -3x - 3y - z, -2x - 4y - z)$
 (C) $L^{-1}(x, y, z) = (0.5x + 0.3y + z, 0.3x + 0.3y + z, 0.5x + 0.25y + z)$
 (D) $L^{-1}(x, y, z) = (2x + y + z, x + 3y + z, x + 4y + z)$
- 6 下列何者不是矩陣 $\begin{bmatrix} 5 & 32 & 17 \\ 0 & 12 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ 的特徵值？
 (A) 5 (B) 8 (C) 11 (D) 14
- 7 給定一複數函數為 $f(z) = r^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) + ir^{\frac{1}{3}} \sin\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right)$ ，其中 $z = x + yi = re^{i\theta}$ ，請問在 $\pi < \theta \leq 3\pi$ 範圍內， $f(1+i) = ?$
 (A) $\sqrt[6]{2}e^{\frac{3}{4}i\pi}$ (B) $\sqrt[6]{2}e^{-\frac{3}{4}i\pi}$ (C) $\sqrt[6]{2}e^{\frac{17}{12}i\pi}$ (D) $\sqrt[6]{2}e^{-\frac{17}{12}i\pi}$
- 8 曲線 $C: y = x^2$ ，從 $(0,0)$ 到 $(2,4)$ ，求 $\int_C z^2 dz = ?$
 (A) $-\frac{88}{3} - \frac{16}{3}i$ (B) $-\frac{88}{3} + \frac{16}{3}i$ (C) $\frac{88}{3} - \frac{8}{3}i$ (D) $-\frac{88}{3} - \frac{8}{3}i$
- 9 求複變級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} (z+i)^{2n}$ 之中心點 (center) 及收斂半徑 (radius of convergence)：
 (A) 中心點 (center) 為 i ，收斂半徑為 e (B) 中心點 (center) 為 $-i$ ，收斂半徑為 $1/e$
 (C) 中心點 (center) 為 $-i$ ，收斂半徑為 $1/\sqrt{e}$ (D) 中心點 (center) 為 i ，收斂半徑為 $\sqrt{e}$
- 10 令 $y = a \cos(3x) + b \sin(3x) + c \cos(4x)$ 為微分方程式 $y'' + 9y = 14 \cos(4x)$ 之解，其中 $y(0) = 0$ ， $y'(0) = 3$ ，求 $a+b+c$ 值？
 (A) 1 (B) 3 (C) 6 (D) 8
- 11 求 $\frac{t}{2\omega} \sin(\omega t)$ 之拉普拉斯轉換 (Laplace Transform)，為下列何者？
 (A) $\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$ (B) $\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}$ (C) $\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$ (D) $\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$

- 12 下列何者是微分方程式 $y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = x^2 + 1$ 的解？（選項中 c_1 和 c_2 為任意常數，而 a_1 和 a_2 為某特定常數。）
- (A) $c_1x^2 + c_2x^2 \ln(x) + a_1 + a_2x^2(\ln(x))^2$ (B) $c_1x^2 + c_2x^2 \ln(x) + a_1x^2(\ln(x))^2 + a_2x^4$
(C) $c_1x + c_2x^4 + a_1 + a_2x^2$ (D) $c_1x + c_2x^4 + a_1x^2 + a_2x^4 \ln(x)$
- 13 請問 $e^{-2x} \cos x$ 是下列那一微分方程式的解？
- (A) $y''' + 7y'' + 16y' - 10y = 0$ (B) $y''' + y'' - 7y' - 15y = 0$
(C) $y'' + 8y' + 17y = 0$ (D) $3y''' + 2y'' - 8y' - 16y = 0$
- 14 下列何者不可能是 $y'' + Ay' + By = 0$ （ A 和 B 為常數）的解？
- (A) x (B) x^2 (C) e^{x+1} (D) $e^x \cos(2x+3)$
- 15 若 c 為常數， $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 與 $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 分別為偏微分波方程式（wave equation）及偏微分熱方程式（heat equation），則下列何者錯誤？
- (A) $u(t, x) = \sin 2t \sin x$ 是偏微分波方程式之解
(B) $u(t, x) = e^{-4t} \cos 3x$ 是偏微分熱方程式之解
(C) $u(t, x) = e^t \sin 3x$ 是偏微分波方程式之解
(D) $u(t, x) = e^{-t} \sin x$ 是偏微分熱方程式之解
- 16 若 $f(t)$ 之拉普拉斯轉換為 $L\{f(t)\} = F(s)$ ，則 $L\{t * e^{2t}\}$ 為何，其中符號“*”為迴旋積（convolution）？
- (A) $\frac{1}{s(s-2)}$ (B) $\frac{1}{s(s+2)}$ (C) $\frac{1}{s^2(s-2)}$ (D) $\frac{1}{s^2(s+2)}$
- 17 有一函數 $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } -5 < x < 0 \\ 3 & \text{if } 0 < x < 5 \end{cases}$ ，週期為 10，則傅立葉係數 $b_n = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 F(x) \sin\left(\frac{n\pi}{5}x\right) dx$ 之值為何？
- (A) $b_n = 0$ (B) $b_n = \frac{(1 - \cos n\pi)}{n\pi}$ (C) $b_n = \frac{3(1 - \cos n\pi)}{n\pi}$ (D) $b_n = 3$
- 18 連續隨機變數 X 具有機率密度函數 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & -1 < x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，求機率 $P(0 < X \leq 1)$ 為何？
- (A) 1/9 (B) 2/9 (C) 1/3 (D) 4/9
- 19 設隨機變數（random variable） X 和 Y 的聯合機率密度函數（joint probability density function）為 $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{12} e^{-(x/4)-(y/3)} & 0 < x < \infty \text{ and } 0 < y < \infty \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$ 。則機率 $P[4 < X \leq 12, 0 < Y < \infty]$ 之值為何？
- (A) $e^{-3} - e^{-4}$ (B) $e^{-1} - e^{-3}$ (C) $e^{-1} - e^{-4}$ (D) 2/3
- 20 某連續隨機變數 X 之值域為 $[0, 1]$ ，密度函數為 $f(x) = 2x$ ，試求期望值 $E[X]$ 為何？
- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) 1