

114年公務人員特種考試警察人員、一般警察人員、
國家安全局國家安全情報人員、移民行政人員考試及
114年特種考試退除役軍人轉任公務人員考試試題

考 試 別：國家安全情報人員考試

等 別：三等考試

類科組別：電子組（選試英文）

科 目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、試求常微分方程式 $x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + 2x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 3x^{-2}$ 之通解。(10 分)

二、試以拉普拉斯轉換法 (Laplace Transform) 求解下列具初值條件之聯立常

$$\text{微分方程式} \begin{bmatrix} \frac{dy_1(t)}{dt} \\ \frac{dy_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6t - t^2 \\ -1 + t - t^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{之特}$$

解。(10 分)

三、 Y 為二階方形矩陣與 I_2 為二階單位矩陣，試求矩陣方程式

$$Y^2 - 6Y + 9I_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \text{之矩陣} Y \text{ 解。} (10 \text{ 分})$$

四、試以剩值定理 (Residue Theorem) 求 $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{3} - \cos \theta}$ 之值。(10 分)

五、 X 為一隨機變數 (Random variable)，其機率密度函數 (probability density

function) 為 $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma^2}}$ ， $\mu_x \in R$ ， $\sigma > 0$ ， $-\infty < x < \infty$ 。試求其期

望值 (Expected value)， $E\{X^2 + 4X + 2\}$ 。(10 分)

乙、測驗題部分：(50 分)

代號：3355

(一)本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當答案。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 設 3×3 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{bmatrix}$ ，若 $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ，問系統 $Ax = b$ 有幾組解？

- (A) 唯一解 (B) 無解 (C) 無限多解 (D) 解空間維度為 2

2 由三個向量 $\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ 所展開 (span) 的向量空間，其維度 (dimension) 為何？

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

3 關於矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的描述，下列何者正確？

- (A) A 的秩數 (rank) 為 2 (B) 0 為 A 的特徵值
(C) A 為可逆 (invertible) 矩陣 (D) A 為正定 (positive definite) 矩陣

4 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$ ，則特徵多項式為何？

- (A) $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1$ (B) $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$ (C) $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1$ (D) $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1$

5 下列那個向量屬於矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 7 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ 的零空間 (null space) ？

- (A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}^T$

6 下列關於二次型 (quadratic form) $Q(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 12x_1x_2 + 9x_2^2$ 的性質，何者正確？

- (A) Q 為正定 (positive definite) (B) Q 為負定 (negative definite)
(C) Q 為半正定 (positive semi-definite) (D) Q 為半負定 (negative semi-definite)

- 7 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$ ，若 $\det(A^T A) = 196$ ，則 $k = ?$
- (A) 7 (B) 14 (C) 2 (D) 1
- 8 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ，請求 $A^{20} = ?$
- (A) $\begin{bmatrix} 0 & 3^{20} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 3^{20} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 3^{10} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 3^{10} & 0 \\ 0 & 3^{10} \end{bmatrix}$
- 9 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \int_0^1 e^{At} dt$ ，則 $\text{trace}(B) = ?$
- (A) $\frac{e^2 - 1}{2} + \frac{e^3 - 1}{3} + \frac{e^4 - 1}{4}$ (B) $\frac{e^2 + e^3 + e^4 - 3}{3}$
- (C) $\frac{e^9 - 1}{9}$ (D) $\ln(e^2 + e^3 + e^4)$
- 10 下列那一個複變函數是「可解析的 (analytic) 函數」？
- (A) $y + ix$ (B) $x^2 + y^2 + 2ixy$ (C) $e^x \cos y + ie^x \sin y$ (D) $e^y \cos x + ie^y \sin x$
- 11 設 $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$ ，則其在 $|z| < 1$ 的羅倫級數 (Laurent series) 展開式前兩項為？
- (A) $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}$ (B) $\frac{1}{z^2} + 1$ (C) $\frac{1}{z^2} + z$ (D) $\frac{1}{z^2} + z^2$
- 12 考慮複變函數 $f(z) = \tan z$ ，請求 $f(z)$ 在 $z_0 = \pi/2$ 的餘數 (residue)， $\text{Res}_{z_0} f(z) = ?$
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) -1
- 13 求微分方程式 $(x^2 + y^2)dy + (2xy + \cos x)dx = 0$ 之解？
- (A) $xy^2 + \sin x + \frac{1}{3}y^3 = c$ (B) $x^2y - \sin x + \frac{1}{3}x^3 = c$ (C) $xy^2 + \sin x + \frac{1}{3}x^3 = c$ (D) $x^2y + \sin x + \frac{1}{3}y^3 = c$
- 14 關於常微分方程式 $\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ 的特徵方程式與特徵根，下列何者正確？
- (A) 特徵方程式為 $\lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda = 0$ (B) $\lambda = 0$ 為其中一個特徵根
- (C) $\lambda = -1$ 為其中一個特徵根 (D) $\lambda = 1$ 為其中一個特徵根

- 15 考慮常微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = 0$ ，下列何者非其齊次解（homogeneous solution）？
- (A) $e^{2x} \cos x$ (B) $e^{2x} \sin x$ (C) $e^{2x}(\cos x + 2 \sin x)$ (D) $e^{2x} \cos x \sin x$
- 16 考慮原始函數 $f(x) = 3x + 2$ ，及其衍生之傅立葉級數（Fourier series）函數
- $f_1(x) = f(x)$ 在 $x \in [0, 1]$ 區間之傅立葉級數（Fourier series）
- $f_2(x) = f(x)$ 在 $x \in [0, 1]$ 區間之傅立葉正弦級數（Fourier sine series）
- $f_3(x) = f(x)$ 在 $x \in [0, 1]$ 區間之傅立葉餘弦級數（Fourier cosine series）
- (A) $f_1(0) = f_2(0)$ (B) $f_1(0) = f_3(0)$ (C) $f_1(1) = f_2(1)$ (D) $f_1(0.5) = f_3(0.5)$
- 17 考慮一偏微分方程式 $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ ； $x \in [0, 1]$ ， $t \geq 0$ 。則下列何者不是齊次邊界條件（homogeneous boundary condition）？
- (A) $u(0,t) = 0$ ， $\frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0$ (B) $u(0,t) + u(1,t) = 0$ ， $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0$
- (C) $u(0,t) = \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}$ ， $u(1,t) = \frac{\partial u(1,t)}{\partial x}$ (D) $u(0,t) + \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0$ ， $u(1,t) = 0$
- 18 設 $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(w)$ 為 $f(t)$ 的傅立葉轉換（Fourier transform），求 $\mathcal{F}\{2f(t) \cdot i \sin 2t\} = ?$ ($i = \sqrt{-1}$)
- (A) $\frac{1}{2}F(w-2) - \frac{1}{2}F(w+2)$ (B) $F(w-2) - F(w+2)$
- (C) $2F(w-2) + 2F(w+2)$ (D) $F(w-2) + F(w+2)$
- 19 一工廠生產 60% 正常品，40% 瑕疵品。品檢員判定正確率為 90%，誤判率為 20%。隨機取出一件產品，判定為「正常」，則實際正常的機率為何？
- (A) $\frac{27}{31}$ (B) $\frac{18}{37}$ (C) $\frac{9}{10}$ (D) $\frac{9}{13}$
- 20 有三個獨立且相同分布（independent, identically distributed, i.i.d.）之隨機變數 $\{X_1, X_2, X_3\}$ ，皆為常態分布（normal distribution），期望值為 μ_x ，標準差為 σ_x 。令 $Y = \frac{X_1 + X_2}{2}$ ，其期望值為 μ_y ，標準差為 σ_y ； $Z = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$ ，其期望值為 μ_z ，標準差為 σ_z 。下列何者正確？
- (A) $\mu_x > \mu_y > \mu_z$ (B) $\mu_x < \mu_y < \mu_z$ (C) $\sigma_x > \sigma_y > \sigma_z$ (D) $\sigma_x < \sigma_y < \sigma_z$