

類 科：統計
科 目：統計學
考試時間：2小時

座號：_____

※注意：(一)可以使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、某一汽車經銷商計算其每賣一部新車的獲利（以十萬元為單位）為 $Y = X^2$ ，若 X 的機率密度函數如下：

$$g(x) = \begin{cases} c(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(一)請計算求得 c 值。(5分)(二)推導求得 Y 之機率密度函數 $f(y)$ 。(10分)

(三)請計算該經銷商在賣下一部新車時，其獲利小於一萬元的機率。(5分)

二、若考慮成對比較試驗 (paired-difference experiment)，每一成對觀測值 $j(j=1,2,\dots,n)$ ，分別接受處理 (treatment) i ， $i=1,2$ 。以下模型描述此一試驗結果：

$$Y_{ij} = \mu_i + P_j + \varepsilon_{ij}$$

其中 μ_i 代表處理 i 的期望反應， P_j 為第 j 個成對實驗單位的隨機效應， ε_{ij} 為隨機誤差。對所有 $i=1,2$ ， $j=1,2,\dots,n$ ，假設 P_j 為獨立的常態分配，其均數為 $E(P_j)=0$ ，變異數 $Var(P_j)=\sigma_P^2$ ； ε_{ij} 為獨立的常態分配， $E(\varepsilon_{ij})=0$ ， $Var(\varepsilon_{ij})=\sigma^2$ ；且 P_j 與 ε_{ij} 互相獨立。

(一)若 $\bar{Y}_i$ 為處理 $i(i=1,2)$ 的 n 個觀測值之均數，請推導求得 $E(\bar{Y}_i)$ 。(5分)(二)請推導求得 $Var(\bar{Y}_i)$ 。(5分)(三)若 $d_j = Y_{1j} - Y_{2j}$ ， $j=1,2,\dots,n$ ，且 $\bar{d}$ 為其均數， s_d 為標準差。推導求得 $E(\bar{d})$ 。(5分)(四)推導求得 $Var(\bar{d})$ 。(7分)(五)在虛無假設 $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ 為真的情況下，請證明 $\frac{\bar{d}\sqrt{n}}{s_d}$ 服從 t 分配；並說明其自

由度。(13分)

(六)若將原前述模型改為

$$Y_{ij} = \mu_i + P_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

假設 P_{ij} 為獨立的常態分配，其均數為 $E(P_{ij})=0$ ，變異數 $Var(P_{ij})=\sigma_P^2$ ；其餘符號之表達及假設與前述相同。推導求得此模型下的 $Var(\bar{d})$ ；並比較此結果與題(四)的差異。(10分)

(請接背面)

類 科：統計
科 目：統計學

三、若 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 為互相獨立且其機率密度函數如下：

$$f(y; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-y/\theta} & y > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

- (一)推導求得 θ 的最大概似估計 (maximum likelihood estimator)。(10 分)
- (二)推導求得 $P(Y \leq 2)$ 的最大概似估計。(5 分)
- (三)若 $Y_{(1)} = \min(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 為最小順序統計量，推導求得 $Y_{(1)}$ 之分配。(10 分)
- (四)證明 $\hat{\theta}_1 = nY_{(1)}$ 為 θ 的不偏估計 (unbiased estimator)。(4 分)
- (五)推導求得 $MSE(\hat{\theta}_1)$ (mean square error of $\hat{\theta}_1$)。(6 分)