

## 101年公務人員高等考試三級考試試題

代號：35920  
36020  
36120全一張  
(正面)

類 科：電力工程、電子工程、電信工程

科 目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：\_\_\_\_\_

※注意：禁止使用電子計算器。

## 甲、申論題部分：(50 分)

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、若  $f(x) = x^2$ ， $-\pi \leq x \leq \pi$ 。求：(一)  $f(x)$  定義於  $[-\pi, \pi]$  的傅立葉級數 (Fourier series) (9 分) (二)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  (3 分)

(三)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$  (3 分)

二、(一)若  $\lambda$  是一個非奇異 (nonsingular) 矩陣  $A$  的特徵值 (eigenvalue)， $X$  是  $\lambda$  對應的特徵向量 (eigenvector)，請證明  $\frac{1}{\lambda}$  及  $X$  分別是  $A^{-1}$  的特徵值及其對應的特徵向量。(10 分)(二)若  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ，請用其最大的特徵值驗證(一)的結果。(5 分)三、藉由考慮級數  $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$  之收斂性，證明  $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{r \cos \theta - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}$ ， $0 < r < 1$ 。(10 分)四、解  $(1+x^2)(dy-dx) = 2xydx$ ，條件為  $y(0) = 1$ 。(10 分)

## 乙、測驗題部分：(50 分)

代號：2303

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 解微分方程式  $y'' - 2y' + 2y = 0$ ；其中初值  $y(0) = -3$ ， $y\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0$ 。

(A)  $y = -3e^t \cos t$

(B)  $y = -3\cos t$

(C)  $y = -3e^{-t} \cos t$

(D)  $y = -3\sin t$

2 下列何者可為微分方程式  $(\sqrt{x^2 + y^2} / y + 2/x)dx + (\sqrt{x^2 + y^2} / x + 2/y)dy = 0$  之積分因子？

(A)  $x^2$

(B)  $y^2$

(C)  $xy$

(D)  $1/xy$

3 已知  $\vec{F} = y^3\vec{i} + x^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ ，求出  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dA$  之值，其中  $S: x^2 + 4y^2 = 4$ ， $x \geq 0$ ， $y \geq 0$ ， $0 \leq z \leq b$ 。

(A)  $2\pi b^3$

(B)  $\frac{1}{2}\pi b^3$

(C)  $\frac{1}{2}\pi b^2$

(D)  $\frac{1}{8}\pi b^3$

4 令  $\vec{v}$  為一常數向量， $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ，則  $\nabla(\vec{v} \cdot \vec{u}) + \nabla \times (\vec{u} - \vec{v})$  等於多少？

(A) 0

(B)  $\vec{u} + \vec{v}$

(C)  $\vec{u}$

(D)  $\vec{v}$

5 橢圓  $x^2 + 4(y-1)^2 = 4$  在點  $P(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}})$  的切線為何？

(A)  $\sqrt{2}(1-t)\vec{i} + (\frac{1}{\sqrt{2}} + 1+t)\vec{j}$

(B)  $\sqrt{2}(1-t)\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}+1+t)\vec{j}$

(C)  $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2}-t)\vec{i} + (1+t)\vec{j}$

(D)  $\frac{1}{\sqrt{2}}(1-t)\vec{i} + (\sqrt{2}+1+t)\vec{j}$

6 若  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ，請求出  $A^3 - 7A^2 + 11A - 4I = ?$ 

(A) 0

(B)  $I$  (單位矩陣 identity matrix) (C)  $A$

(D)  $\begin{bmatrix} 12 & 11 & 5 \\ 4 & 13 & 17 \\ 14 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

(請接背面)

類 科：電力工程、電子工程、電信工程  
科 目：工程數學

- 7 試問二次式 (quadratic form) :  $4x_1^2 - 4x_2^2 + 6x_1x_2 = 8$  在  $(x_1, x_2)$ -平面上是哪一種曲線？  
(A)圓 (circle) (B)橢圓 (ellipse) (C)雙曲線 (hyperbola) (D)拋物線 (parabola)
- 8 設  $x_1, x_2, x_3$  為下列聯立方程組之解，  

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= -4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$
則  $x_1 + x_2 + x_3$  等於多少？  
(A) -1 (B) 4 (C)  $6\frac{1}{2}$  (D)  $9\frac{2}{3}$
- 9 試求函數  $F(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2}$  的反拉普拉斯轉換 (inverse Laplace transform) 。  
(A)  $\frac{1}{2}(\sin t + t \cos t)$  (B)  $\frac{1}{2}(\sin t - t \cos t)$  (C)  $\frac{1}{2}(\cos t - t \sin t)$  (D)  $\frac{1}{2}(\cos t + t \sin t)$
- 10  $g(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } t < 3 \\ t^2, & \text{if } t \geq 3 \end{cases}$ ，下列何者為  $g(t)$  的拉普拉斯轉換  $L\{g(t)\}$ ？  
(A)  $(\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s})e^{3s}$  (B)  $(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{6}{s})e^{3s}$  (C)  $(\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s})e^{-3s}$  (D)  $(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{6}{s})e^{-3s}$
- 11 反拉普拉斯轉換  $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 2s + 5}\right)$  等於下列何者？  
(A)  $\sin 2(t-1)$  (B)  $e^t \cos(2t)$  (C)  $e^{-t} \cos(2t)$  (D)  $\frac{1}{2}e^{-t} \sin(2t)$
- 12 有一函數  $f(x) = x + \pi$ ，其中  $-\pi < x < \pi$  且  $f(x + 2\pi) = f(x)$ ，求其傅立葉級數為何？  
(A)  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{2}{n} \cos n\pi) \sin nx$  (B)  $f(x) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{2}{n} \cos n\pi) \sin nx$   
(C)  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{n} \cos n\pi) \sin nx$  (D)  $f(x) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{n} \cos n\pi) \sin nx$
- 13 利用傅立葉級數的觀念求出等式  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2n\pi}{T}t}$  中  $c_n$  的值，其中  $\delta(t)$  為 Dirac delta 函數， $T$  是固定的週期。  
(A)  $\frac{1}{T}$  (B)  $-\frac{1}{T}$  (C)  $\frac{2}{T}$  (D)  $-\frac{2}{T}$
- 14 定義函數  $f(t)$  的傅立葉轉換 (Fourier transform) 為  $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$ ，其中  $i = \sqrt{-1}$ 。求  $f(t)\sin(\omega_0 t)$  的傅立葉轉換為何？  
(A)  $\frac{i}{2}(F(\omega + \omega_0) - F(\omega - \omega_0))$  (B)  $\frac{1}{2}(F(\omega + \omega_0) - F(\omega - \omega_0))$  (C)  $\frac{1}{2}(F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0))$  (D)  $\frac{i}{2}(F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0))$
- 15 級數  $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10^n} (x-5)^n$  的收斂半徑 (radius of convergence) 為何？  
(A) 1/10 (B) 1/5 (C)  $\sqrt{10}$  (D) 10
- 16 求  $\int \sin(3z)\cos(3z)dz = ?$   
(A)  $\frac{1}{6}\sin^2 3z + c$  (B)  $\sin^2 3z + c$  (C)  $6\sin^2 3z + c$  (D)  $3\sin^2 3z + c$
- 17 求  $\frac{da^z}{dz} = ?$   
(A)  $a^z$  (B)  $a^z \ln a$  (C)  $\ln a$  (D)  $a^z / \ln a$
- 18 極座標之二維位能函數 (potential function)  $u(r, \theta)$  滿足 Laplace's 方程式  $\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$ ，若  $u$  與  $\theta$  無關，亦即  $u = u(r)$ ，則下列何者可能為其解？  
(A)  $u = \frac{1}{r}$  (B)  $u = \ln r$  (C)  $u = e^{-r}$  (D)  $u = re^{-r}$
- 19 給定一個隨機變數  $X$ ，已知期望值 (mean)  $E[X] = 2$ ， $E[X(X-4)] = 5$ ，則  $12 - 4X$  的變異值 (variance) 為何？  
(A) 4 (B) 13 (C) 17 (D) 144
- 20 給定一個連續隨機變數  $X$ ，它的機率密度函數為  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{50\pi}} e^{-\frac{x^2}{50}}$ ， $-\infty < x < \infty$ 。則  $X^3$  的期望值 (mean) 為何？  
(A) 0 (B) 3 (C) 25 (D) 50