

等 別：高等考試

類 科：電機工程技師

科 目：工程數學（包括線性代數、微分方程、複變函數與機率）

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、試解下列微分方程式：

$$x^2 dy + (xy + 1)dx = 0 \quad (10 \text{ 分})$$

二、試求下列微分方程式的完全解：

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = u(t), \text{ 其中 } y(0) = \frac{dy}{dt}(0) = 1, u(t) = \begin{cases} 0, & t < 3 \\ t, & t \geq 3 \end{cases} \quad (15 \text{ 分})$$

$$\text{三、令 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(一)試求矩陣 $\mathbf{A}$ 的特徵值 (eigenvalues) λ_1 、 λ_2 、 λ_3 。(5 分)

(二)試求矩陣 $\mathbf{A}$ 之特徵向量 (eigenvectors) u_1 、 u_2 、 u_3 。(5 分)

(三)使用 Gram-Schmidt process，試求 u_1 、 u_2 、 u_3 對應之 v_1 、 v_2 、 v_3 ，使得矩陣

$P = [v_1 \ v_2 \ v_3]$ 且 $P^T = P$ (orthogonal matrix)，其中 T 為轉秩 (transpose) 運算。
(10 分)

四、試求下列齊次聯立方程式 (homogeneous linear system) 之解集合空間 (solution space) 之維度 (dimension) 及一組基底 (basis)。(10 分)

$$-x_1 + 2x_2 + 4x_4 = 0$$

$$3x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0$$

$$2x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0$$

五、若 z 為複數 (complex variables)，試計算積分 $\oint_C \frac{\sin(z)}{z^2(z^2+1)} dz$ ，其中 C 為圓 $|z|=2$ 。

(15 分)

六、試計算積分值 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3+1} dx$ (方法不拘)。(10 分)

(請接背面)

等 別：高等考試

類 科：電機工程技師

科 目：工程數學（包括線性代數、微分方程、複變函數與機率）

七、令 X 和 Y 代表某事件隨機變數（random variables），其聯合機率密度函數（joint probability distribution）如下：

$$f(x, y) = \begin{cases} 2xy, & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

試求 X 和 Y 的共變異值（covariance）。（10 分）

八、令 X 和 Y 代表某批產品兩種不同類型雜質數量的隨機變數（random variables）且 X 和 Y 互為獨立（independent）。已知 X 和 Y 的變異值（variance）各為 $\sigma_X^2 = 2$ 和 $\sigma_Y^2 = 3$ 。試求隨機變數 $Z = 3X - 2Y + 1$ 的變異值。（10 分）