

115年公務人員普通考試試題

類 科：統計

科 目：統計學概要

考試時間：1 小時 30 分

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、2026 年金融市場見證了比特幣角色的重大轉變。隨美伊衝突升溫，黃金發揮避險功能大幅飆升，比特幣卻因其高風險係數屬性隨流動性收縮而下跌。研究員欲探討比特幣月收益率（以變數 Y 表示，%）與黃金月收益率（以變數 X 表示，%）的關係，隨機抽取 18 個月份的數據做分析。（每小題 10 分，共 30 分）

(一)若用最小平方法，以黃金月收益率（ X ）為自變數，比特幣月收益率（ Y ）為應變數，建立簡單直線迴歸模型，得 $\hat{Y} = 10 - 2X$ ，判定係數為 $R^2 = 0.36$ ，且已知這 18 個月黃金月平均收益率為 8。請以 Y 為自變數， X 為應變數，用最小平方法建立簡單直線迴歸模型。

(二)續題(一)，若考慮簡單直線迴歸模型 $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ ， $i = 1, 2, \dots, 18$ ，且假設誤差 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{18}$ 彼此相互獨立且服從平均數為 0，變異數為 σ^2 之常態分配，求檢定虛無假設 $H_0: \beta_1 = 0$ 之 t 檢定統計量之值。

(三)續題(一)，若研究員因研究之需求，將變數進行線性轉換，定義新變數 $D_i = -2X_i$ 及 $E_i = 3Y_i + 5$ ， $i = 1, 2, \dots, 18$ 。請以 D_i 為自變數， E_i 為應變數，用最小平方法建立新的簡單直線迴歸模型。

二、AI 正從螢幕虛擬層面跨足實體世界。亞馬遜與寶馬等巨頭透過 AI 調度物流機器人，實現倉儲與生產線的自主作業，大幅優化生產效率與精確度。在某自動化智慧倉儲中，大量物流機器人負責搬運貨物。根據大數據監控，每台機器人在執行單次精密對接任務時，成功的機率為 p ，且已知每次任務成功與否彼此相互獨立。（每小題 10 分，共 20 分）

(一)令變數 R 為該機器人「直到第一次對接失敗為止，所需對接次數」。假設有 n 台獨立運作的機器人，其直到第一次對接失敗為止所需對接次數，分別定義為 $R_1, R_2, \dots, R_n$ 。請利用隨機樣本 $R_1, R_2, \dots, R_n$ ，求出該機器人能連續穩定運作了 50 次任務而未出錯之下，但在接下來的 2 次任務內會出錯的條件機率 $P[R \leq 52 | R > 50]$ 的動差法估計量（method of moments estimator）。

(二)令變數 W 為該機器人「直到發生第二次對接成功時，期間所累積的失敗次數」，求出 W 之期望值。

三、當前全球進入半導體軍備競賽，先進製程與 AI 晶片已成為決定科技霸權的戰略制高點。某跨國晶圓代工巨頭為評估海外新設「AI 先進製程晶圓廠」的曝光機之設備穩定度，針對極紫外光曝光後晶圓特定關鍵區域上的微粒缺陷數進行抽樣檢測。根據歷史數據顯示，該區域的微粒缺陷數（以變數 X 表示）服從下列之機率分配：

$$f(x) = \begin{cases} 0.3, x=0 & (\text{極佳}) \\ 0.4, x=1 & (\text{合格}) \\ 0.3, x=2 & (\text{瑕疵}) \end{cases}$$

現製程良率工程師隨機檢測 2 片晶圓並觀測該特定關鍵區域的微粒數，記為隨機樣本 X_1, X_2 ，並計算其樣本平均數 $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$ 與樣本標準差 $S = \sqrt{\frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2}{2-1}}$ 。假設 X_1 與 X_2 彼此相互獨立。（每小題 10 分，共 50 分）

(一)求樣本標準差 S 之機率密度函數。

(二)求樣本平均數 $\bar{X}$ 與樣本標準差 S 之間的共變異數 $\text{cov}(\bar{X}, S)$ 。

(三)求 $\bar{X} = 1$ 之下，樣本標準差 S 之條件期望值 $E(S | \bar{X} = 1)$ 。

(四)根據歷史數據顯示，該極紫外光曝光機在對每片晶圓進行曝光時，特定關鍵區域「無微粒缺陷」（即完全達標合格）的機率為 0.3，且每片晶圓的檢測結果彼此相互獨立。若該區域出現微粒缺陷，則視為一次「出錯或失敗」。工程師為了進行設備耐受度測試，設定曝光機必須直到累積發生第 2 次「無微粒缺陷」（合格）時才停止測試。令隨機變數 W 表示在此期間該曝光機所累積的「出錯（失敗）次數」。請寫出 W 的機率密度函數。

(五)續題(四)，品管團隊關心曝光機的連續穩定運作能力。令隨機變數 R 為該曝光機檢測「直到第一次發生微粒缺陷（出錯）」為止，所累積的總曝光晶圓次數（含出錯的那一次）。求該曝光機在連續穩定運作了 100 次任務而未出錯的條件下，在接下來的 1 次任務內（即第 101 次）也不會出錯的條件機率 $P[R > 101 | R > 100]$ 。