

類 科：核子工程

科 目：微積分與微分方程

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)務必將所有演算過程寫在試卷上，否則不予計分。

一、

(一)已知函數 $f(x) = \begin{cases} \frac{(0.5)^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$ ，在 $x=0$ 處連續，求 k 值。(15 分)

(二)求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sec x - 1} = ?$ (10 分)

二、(一)已知函數 $f(x, y) = 4xy - x^2 - y^2 - 6x$ ，求此函數在以 $(0, 0)$ ， $(2, 0)$ ， $(2, 6)$ 三點所圍成的三角形區域 $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3x\}$ 的最大值和最小值。(15 分)

(二)求 $\iint_{\Omega} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dx dy$ ，其中 Ω 是由 $(0, 0)$ ， $(1, 0)$ ， $(1, 1)$ 三點所圍成的三角形區域。(15 分)

三、已知向量 $\vec{v}(x, y, z) = x^2 y \vec{i} + y^2 z \vec{j} + xy^2 \vec{k}$ ，計算下列之值：(每小題 10 分，共 20 分)

(一) $\nabla \cdot \vec{v}(-1, 2, 3)$ 。

(二) $\nabla \times \vec{v}(3, -2, 1)$ 。

四、已知微分方程系統

$$\frac{df_1(t)}{dt} = -0.7 f_1(t), \quad f_1(0) = 1,$$

$$\frac{df_2(t)}{dt} = 0.7 f_1(t) - 0.5 f_2(t), \quad f_2(0) = 0,$$

$$\frac{df_3(t)}{dt} = 0.5 f_2(t), \quad f_3(0) = 0$$

求 $f_1(t)$ ， $f_2(t)$ 和 $f_3(t)$ 。(25 分)