

101年公務人員特種考試外交領事人員外交行政人員考試、101年公務人員特種考試國際經濟商務人員考試、101年公務人員特種考試法務部調查局調查人員考試、101年公務人員特種考試國家安全局國家安全情報人員考試、101年公務人員特種考試民航人員考試、101年公務人員特種考試經濟部專利商標審查人員考試試題

考試別：國家安全情報人員

等別：三等考試

類科組：電子組

科目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50 分)

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、請應用留數定理 (Residue Theorem) 計算下列積分 $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$ 。(15 分)

二、設 $T: R^3 \rightarrow R^3$ 為一線性轉換 (linear transformation)，定義如下：

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + 2x_2 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = 3x_1 + 5x_2 + ax_3 \end{cases} \quad (\text{其中 } a \text{ 為一常數})$$

(一)若 T 的反轉換 (inverse transformation) 存在，則常數 a 之值有何限制？(7 分)

(二)設 $a = 1$ ，求 T 的反轉換。(8 分)

三、假設有一曲線 C 如下： $C: \vec{R}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + 1\vec{k}$ ，其中 $0 \leq t \leq 2\pi$ ，求 $\int_C \vec{F} \times d\vec{\ell}$ ，

其中向量函數 $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 。(10 分)

四、 y 為 x 的函數 ($y = y(x)$)，求下列微分方程式的通解：(10 分)

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$$

乙、測驗題部分：(50 分)

代號：6506

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

- 對微分方程式的初始值問題 (initial value problem) $xy'' + 1n(x^2 + 1)y' + (\sin x)y = \frac{e^{-x}}{x^2 - 9}$ ， $y(2) = 0$ ， $y'(2) = 1$ 可以確定的是 x 在下列那一區間可保證有唯一解？
(A) $-3 < x < 3$ (B) $0 < x < 3$ (C) $-3 < x < \infty$ (D) $-\infty < x < \infty$
- 已知微分方程式 $y'' + \alpha y' + \beta y = 0$ 的通解為 $y(x) = e^{-3x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$ ，試求 α 、 β 之值，並判定下列何者正確？(題中 α 、 β 、 A 及 B 為常數。)
(A) $\alpha + \beta = 13$ (B) $\alpha + \beta = 15$ (C) $\alpha + \beta = 17$ (D) $\alpha + \beta = 19$
- 下列何者為微分方程式 $\frac{dy}{dx} - (1 + \frac{1}{x})y - 2x + 2x^2 = 0$ ， $x \neq 0$ ，之通解？
(A) $y = 2x^2 + ce^x$ ，其中 c 為常數 (B) $y = 2x^2 + cxe^x$ ，其中 c 為常數
(C) $y = 2x + cx^2e^x$ ，其中 c 為常數 (D) $y = x^2(2 + ce^x)$ ，其中 c 為常數
- 若 $y(t)$ 之拉氏轉換為 $Y(s) = \frac{s+11}{s^2+6s+13}$ ，試求 $y(t)$ ？
(A) $y(t) = e^{-3t}[\cos(2t) + 4\sin(2t)]$ (B) $y(t) = 4\cos(3t) + \sin(2t)$
(C) $y(t) = e^{-3t}[4\cos(2t) + \sin(2t)]$ (D) $y(t) = e^{-3t} + 4e^{-2t}$
- 微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 6x^{-3}e^x$ 之解為 $y = e^x(a + bx + cx^{-1})$ ，其中 a 、 b 、 c 為任意常數，求 c 值？
(A) -2 (B) 2 (C) 3 (D) 6
- 對於微分方程式 $x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = 2\sin t + 4\cos t$ ，下列何者為錯？
(A) 其穩態解 (steady state solution) 含有 $\sin t$ (B) 其穩態解含有 $\cos t$
(C) 其暫態解 (transient solution) 含有 $e^{-t} \sin t$ 項 (D) 其暫態解含有 $e^{-t} \cos t$ 項

- 7 請問 $z=0$ 是複變函數 $f(z)=\frac{1-e^{z^2}}{z^3}$ 的幾階極點 (pole) ?
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- 8 令複數 $z=x+iy$ ，試問方程式 $|z-1|=|z+i|$ 其幾何圖形為何？
- (A)圓形 (B)橢圓 (C)直線 (D)雙曲線
- 9 令級數 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-i}{4}\right)^n (z+i)^n$ ，請問其微分 $f'(z)$ 的級數在下面那一區域收斂 (converge) ?
- (A) $|z+i|<4\sqrt{2}$ (B) $|z+i|<2\sqrt{2}$ (C) $|z|<2\sqrt{2}$ (D) $|z+i|<4$
- 10 設 C 的參數表示式為 $x=2\cos(t)$ ； $y=2\sin(t)$ ； $z=3$ ，其中 $0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$ ，而其質量密度函數 (mass density function) 為 $\delta(x,y,z)=xy^2$ ，則其總質量為何？
- (A) 5 (B) $\frac{16}{3}$ (C) $3\sqrt{3}$ (D) $\frac{3\pi}{8}$
- 11 試求向量場 $\mathbf{v}=\sinh(x-z)\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+(z-y^2)\mathbf{k}$ 的旋度 (curl) ?
- (A) $-2y\mathbf{i}+\cosh(x-z)\mathbf{j}$ (B) $2y\mathbf{i}+\cosh(x-z)\mathbf{j}$
- (C) $2y\mathbf{i}-\cosh(x-z)\mathbf{j}$ (D) $-2y\mathbf{i}-\cosh(x-z)\mathbf{j}$
- 12 若 $\mathbf{F}$ 為 R^3 上之一常數向量，且 x, y, z 為變數，定義 $\mathbf{G}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ ，則下列敘述何者錯誤？
- (A) $\nabla(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})=\mathbf{F}$ (B) $\nabla\cdot(\mathbf{G}-\mathbf{F})=3$ (C) $\nabla\times(\mathbf{F}-\mathbf{G})=0$ (D) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{G})=3$
- 13 設矩陣 $A=\begin{bmatrix}-1 & 4 \\ 0 & 3\end{bmatrix}$ ，下列選項何者正確？
- (A) $A^{100}=\begin{bmatrix}1 & 4^{100} \\ 0 & 3^{100}\end{bmatrix}$ (B) $A^{100}=\begin{bmatrix}1 & -4^{100} \\ 0 & 3^{100}\end{bmatrix}$ (C) $A^{100}=\begin{bmatrix}1 & 4^{100}-1 \\ 0 & 3^{100}\end{bmatrix}$ (D) $A^{100}=\begin{bmatrix}1 & 3^{100}-1 \\ 0 & 3^{100}\end{bmatrix}$
- 14 設 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 \\ 0 & 2\end{bmatrix}$ ；則 A^k 為何？其中 k 為正整數。
- (A) $\begin{bmatrix}1 & -1 \\ 0 & 2^k\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}1 & 1-2^k \\ 0 & 2^k\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}1 & 2^k-1 \\ 0 & 2^k\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}1 & -(2^k+1) \\ 0 & 2^k\end{bmatrix}$

- 15 若 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 $n \times n$ 矩陣 A 的特徵值 (eigenvalue)， a_{ij} 是 A 內位置 (i,j) 的元素值，則下列何者為錯誤？

(A) $\lambda_1 \times \lambda_2 \times \dots \times \lambda_n = \det(A)$

(B) $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

(C) $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}$

(D) 若 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ，則 $e^A = \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix}$

- 16 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ，試求 $A^2 - B^3$ ？

(A) $\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -11 & 12 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -12 & 11 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 12 & 11 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}$

- 17 設 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ，若矩陣 A 特徵值 (eigenvalue) 分別為 $\lambda_1 = 4$ ， $\lambda_2 = b$ ，下列何者可為特徵值 λ_2 對應之特徵向量 (eigenvector)？

(A) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

- 18 兩連續隨機變數 X 、 Y 之結合機率密度函數 (joint probability density function) 為

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6}(x+y), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{變異數 (variance) } \text{Var}(Y) = ?$$

(A) $\frac{13}{24}$

(B) $\frac{39}{64}$

(C) $\frac{13}{48}$

(D) $\frac{11}{24}$

- 19 兩連續隨機變數 X 、 Y 之結合機率密度函數 (joint probability density function) 為

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 3x^2 + 2xy + 6Ay^2, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, A \text{ 為何？}$$

(A) $\frac{23}{32}$

(B) $-\frac{23}{32}$

(C) $\frac{25}{32}$

(D) $-\frac{25}{32}$

- 20 十元錢幣 A、B 共 2 枚，A 擲出後人像向上之機率為 $\frac{1}{10}$ ，B 則為 $\frac{1}{2}$ ，若自此 2 枚錢幣隨機挑選 1 枚然後

擲出 2 次，在擲出 2 次皆為人像之前提下，被選之錢幣為 B 之機率為何？

(A) $\frac{19}{26}$

(B) $\frac{21}{26}$

(C) $\frac{23}{26}$

(D) $\frac{25}{26}$