

等 別： 高考一級

類 科： 物理

科 目： 近代物理研究

考試時間： 3 小時

座號： _____

※注意：(一)可以使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)請以黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

本試題中可能會用到的物理常數：光速 $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$ ，普朗克常數 $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

一、一波長為 22 pm ($1 \text{ pm} = 10^{-12} \text{ m}$) 的 X 光打在碳靶 (carbon target) 後，在垂直於入射光 (incident beam) 的方向被偵測到。請算出被偵測到之 X 光的波長。(10 分)

二、一氫原子中的電子之波函數 (wave function) 為

$$\psi = \frac{1}{6} [3\psi_{100}(r) + 4\psi_{211}(r) - \psi_{210}(r) + \sqrt{10}\psi_{21-1}(r)]。$$

請求出該電子之(一)能量的期望值 $\langle E \rangle$ ，(二)角動量平方的期望值 $\langle L^2 \rangle$ ，(三)角動量之 z 分量的期望值 $\langle L_z \rangle$ 。(註： ψ_{100} 代表該波函數之 $n=1, l=m_l=0$) (15 分)

三、一個含有兩個自旋 $\frac{1}{2}$ (spin- $\frac{1}{2}$) 粒子的系統可以有 4 種態 (states)，其自旋態分別為 $|++\rangle$ ， $|+-\rangle$ ， $| - + \rangle$ 和 $|--\rangle$ 。其中有兩種態的 m -值為 0： $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle)$ 和 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$ 。請證明 (show) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle)$ 是屬於三重態 (triplet state, $S=1$) 而 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$ 是屬於單重態 (singlet state, $S=0$)。(10 分)

四、一粒子被限制在 $x=0$ 和 $x=a$ 間運動。其波函數 (wave function) 為 $\psi(x,t) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-i\omega t}$ 。

請求出該粒子所受到的位能 $V(x)$ 。(10 分)

五、一粒子的歸一波函數 (normalized wave function) 為

$$\psi(x) = 2\alpha^{3/2}xe^{-\alpha x} \quad x > 0; \quad \psi(x) = 0 \quad x < 0$$

請算出 $\langle x \rangle$ ， $\langle p^2 \rangle$ 。(註： $\langle x \rangle$ 為 x 的期望值) (10 分)

六、有 N 個質量為 m ，自旋為 $\frac{1}{2}$ (spin- $\frac{1}{2}$) 之粒子被限制在 $x=0$ 和 $x=a$ 的無限大位能井內運動。請算出此系統中有粒子填充 (occupied) 之最高能階為何？(粒子間無相互作用) (10 分)

七、有一極小的微擾位能 $V(x) = kx^4$ ，($k > 0$) 加諸於一度空間諧振位能 (harmonic oscillator potential) 的系統 $H = p^2/2m + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ 上。請算出此微擾對原系統之基態能量 E_0 所產生的變化 ΔE ？(10 分)

八、依據導電的特性，請說明什麼是(一)金屬 (metal)，(二)半金屬 (half-metal)，(三)半導體 (semiconductor)。(15 分)

九、有一顆動能為 2.00 百萬電子伏特 (MeV) 的電子，請計算該電子的動量 (momentum) 值。(10 分)