

109 學年度指定科目考試(補考) 數學甲考科非選擇題參考答案

數學甲的題型有選擇、選填與非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。

109 學年度指定科目考試(補考)數學甲考科非選擇題各大題的參考答案說明如下：

第一題

第(1)小題 (4 分)

$(2,0,1)$ 與 $(0,1,1)$ 做外積得平面法向量為 $(-1,-2,2)$ 。

因為通過原點，所以平面 E 的方程式為 $x + 2y - 2z = 0$ ，

即 $b = 2$ 、 $c = -2$ 、 $d = 0$ 。

第(2)小題 (2 分)

因為 $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}$ ，又 $\overrightarrow{A'A}$ 與 $\overrightarrow{u}$ 垂直， $\overrightarrow{BB'}$ 與 $\overrightarrow{u}$ 垂直，所以

$$\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{A'A} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u}$$

第(3)小題 (6 分)

由(2)同理可得 $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{v}$ ；因此

$$5 = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{u} = \alpha(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}) + \beta(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}) \text{ 且 } 2 = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{v} = \alpha(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) + \beta(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v})。$$

$$\text{又 } \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 5, \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = 2, \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 1$$

$$\text{解聯立方程組 } \begin{cases} 5\alpha + \beta = 5 \\ \alpha + 2\beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{8}{9}, \beta = \frac{5}{9}。$$

第二題

第(1)(2)小題（各4分）

解法一

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$$

$$= \frac{1}{3} f'(x)(x+k) = \frac{1}{3} (3x^2 + 2bx + c)(x+k) = x^3 + \left(\frac{2}{3}b+k\right)x^2 + \left(\frac{2}{3}bk + \frac{c}{3}\right)x + \frac{c}{3}k$$

比較 x^2 項係數，得 $b = \frac{2}{3}b + k \Rightarrow k = \frac{b}{3}$ ，也就是 $b = 3k$ 。

比較 x 項與常數項係數並將 $b = 3k$ 代入得 $c = 3k^2, d = k^3$ 。

因此

$$f(x) = (x+k)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(x+k)^2。$$

故 $f'(x) = 0$ 有重根 $-k$ 。

解法二

因為 $f'(x) = \frac{1}{3}(f''(x)(x+k) + f'(x))$ ，所以 $f'(x) = \frac{1}{2}f''(x)(x+k)$ ，故 $-k$ 皆為 $f(x) = 0$ 、

$f'(x) = 0$ 的根，即 $-k$ 為 $f(x) = 0$ 的重根。

若 $\alpha \neq -k$ 為 $f(x) = 0$ 的另一相異實根，由 $f(\alpha) = \frac{1}{3}f'(\alpha)(\alpha+k) = 0$ 知 $f'(\alpha) = 0$ ，即 α 也是

$f(x) = 0$ 的重根。此與 $f(x)$ 為三次多項式相矛盾。故 $-k$ 為 $f(x) = 0$ 的三重根。因此

$$f(x) = (x+k)^3，$$

展開得 $b = 3k$ 。

第(3)小題（4分）

由 $f(-1) = 0$ ，推得 $k = 1$ ，即 $f(x) = (x+1)^3$ ，

$$\text{所以 } \int_0^1 (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) dx = \frac{1}{4} + 1 + \frac{3}{2} + 1 = \frac{15}{4}。$$