

等 別：高考二級
類 科：經建行政（一般組）
科 目：數量方法（包括計量經濟學與數理統計）
考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)可以使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)請以黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

(四)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、考慮一個簡單線性迴歸方程式，其應變數已取自然對數，即 $\log(y_t)$ ，自變數是應變數的落後期 ($\log(y_{t-1})$)：

$$\log(y_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \log(y_{t-1}) + u_t, t = 1, \dots, T \text{ (樣本數)}$$

其中 α_0 與 α_1 代表未知參數， u_t 代表隨機干擾項，其平均數等於零，變異數為常數，具有相同且獨立的分配 (identically and independently distributed)。(每小題 10 分，共 20 分)

(一)請證明 α_1 的最小平方估計式 (least squares estimator)， $\hat{\alpha}_1$ ，是否具有不偏性 (unbiasedness)？

(二)假設 y_t 與 y_{t-1} 擁有相同分配，請證明 $|\alpha_1| < 1$ 。

二、令一個簡單迴歸方程式如下：

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + v_i - u_i, i = 1, \dots, n,$$

其中 α_0 與 α_1 代表迴歸係數，下標 i 代表樣本點，共有 n 筆資料，以下敘述為簡潔起見，有時會省略下標 i 。 $v - u$ 稱為組合誤差項 (composed errors)， $v \sim N(0, \sigma_v^2)$ 代表隨機干擾項， $u \sim |N(0, \sigma_u^2)|$ 文獻上稱為半常態分配，是將常態分配隨機變數從 0 以下截斷，假設隨機變數 v 與 u 統計獨立。已知 u 的機率密度函數 (probability density function, pdf) 為

$$f(u) = \frac{2}{\sqrt{2\pi} \sigma_u} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{u^2}{\sigma_u^2}\right), 0 \leq u \leq \infty.$$

令 $\varepsilon_i = v_i - u_i$ ，已知 ε 的 pdf，即 $f(\varepsilon) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma \sqrt{\pi}} \phi\left(\frac{-\varepsilon \lambda}{\sigma}\right) \exp\left(\frac{-1}{2} \frac{\varepsilon^2}{\sigma^2}\right)$ ，

其中 $\phi(\cdot)$ 代表標準常態分配的累積分配函數， $\lambda = \sigma_u / \sigma_v$ ， $\sigma^2 = \sigma_u^2 + \sigma_v^2$ 。
請推導 $u|\varepsilon$ 的條件 pdf，即 $f(u|\varepsilon)$ 。(15 分)

三、一個探討家戶休閒娛樂支出與所得關係的實證研究，取得樣本數計 256 個家戶，依所得高低分成低、中與高三群。使用簡單迴歸模型，應變數與自變數都取自然對數轉換。利用每一群樣本以及全部樣本分別估計，得到以下結果：

所得類別	斜率項係數估計值	殘差變異數 (residual variance)	樣本數
低所得群	0.03	0.26	102
中所得群	0.09	0.42	102
高所得群	0.16	0.30	52
全部樣本戶	0.075	0.38	256

- (一)請檢定這三個所得群家戶，他們的支出函數是否相同？（10 分）
（本題 F 分配的 5% 臨界值為 2.37）
- (二)進行前小題的檢定，必須有什麼前提假設？（5 分）
- (三)已知使用全體樣本計算自變數（取自然對數的所得）的變異數，等於 25，若虛無假設為：全體樣本戶的支出彈性等於 0.10，請檢定是否接受此虛無假設？（5 分）（本題 t 分配的雙尾 5% 臨界值為 ± 1.96 ）

四、假設使用兩種生產要素的生產函數設定如下：

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{樣本數})$$

其中 y_i 是第 i 家公司取自然對數的生產量， x_{i2} 與 x_{i3} 分別代表取自然對數的勞動與資本財投入量， ε_i 為隨機干擾項。已知

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_{i2} - \bar{x}_2)^2 &= 12, & \sum_{i=1}^n (x_{i3} - \bar{x}_3)^2 &= 12, \\ \sum_{i=1}^n (x_{i2} - \bar{x}_2)(x_{i3} - \bar{x}_3) &= 8, & \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 &= 10, \\ \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_{i2} - \bar{x}_2) &= 10, & \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_{i3} - \bar{x}_3) &= 8, \end{aligned}$$

各變數有上橫線者，代表樣本算術平均數。在樣本數等於 23 以及迴歸基本假設都成立的情況下：（每小題 10 分，共 20 分）

- (一)請計算 β_2 與 β_3 的最小平方估計值。
- (二)請檢定此產業的生產技術是否為固定規模報酬（constant returns to scale）？即檢定 $H_0: \beta_2 + \beta_3 = 1$ 的虛無假設。（本題 t 分配的雙尾 5% 臨界值為 ± 2.086 ）

五、複迴歸模型設定： $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + \varepsilon_t$ ，

應變數為 y_t ， x_{t2} 與 x_{t3} 為自變數，三個迴歸係數以 β 符號代表，誤差項 ε_t 表為： $\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t, t = 2, 3, \dots, T$.

自我迴歸係數 $|\rho| < 1$ ，隨機變數 u_t 可稱為白噪音（white noise）。在其他迴歸基本假設或稱高斯馬可夫假設（Guass-Markov assumptions）都成立的情況下：

(一)若採用最小平方法直接估計本題複迴歸方程式，估計式是否具備最佳線性不偏（best linear unbiased）性質？應如何轉換迴歸模型，可讓最小平方估計式具備此性質？（10 分）

(二)請證明估計式 $\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^T e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^T e_{t-1}^2}$ 是自我迴歸係數 ρ 的一致性估計式， e_t 與

e_{t-1} 分別是本題複迴歸模型的當期與落後一期的最小平方殘差。（5 分）

(三)請說明如何計算 Durbin-Watson 統計量。在大樣本之下，此統計量會趨近於什麼數值？（5 分）

(四)如果研究者估計一條迴歸方程式並得到以下結果：

$$y_t = 3.7 + 0.38x_t + 0.93y_{t-1} + e_t, R^2 = 0.98, DW = 1.9$$

S.E. (0.39) (0.06)

其中 e_t 是殘差項，S.E. 為估計標準誤（standard error）， R^2 代表判定係數（coefficient of determination）， DW 代表 Durbin-Watson 統計量。以上數據顯示模型配適度極佳，而且 DW 統計量很接近 2，顯示不存在自我相關（autocorrelation）。

前段說法是否正確？（5 分）