

類 科：氣象

科 目：應用數學（包括微積分、微分方程與向量分析）

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、當正數 α 與 β 都極小時，請求出下列近似式。(10 分)

$$\frac{1}{\cos \alpha}(1 - \cos \beta) \cong \frac{\beta^2}{2} + \frac{\alpha^2 \beta^2}{4}$$

二、求出下列積分。(每小題 5 分，共 20 分)

$$(一) \int_0^2 (3x^4 + \frac{1}{\sqrt{x}} + e^{3x}) dx$$

$$(二) \int_0^{\pi/4} \cos(3x) dx$$

$$(三) \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^3(x) \sin(x) dx$$

$$(四) \int_1^2 (\frac{1}{2x}) dx$$

三、一個半徑為 R 且球心在原點的球面可利用兩個變數 ϕ 和 θ 來進行參數化表示，其中 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ，為方位角，由正東（+x 軸）開始往逆時針方向增加， $0 \leq \phi \leq \pi$ 為天頂角，朝正上方為 0 度，水平為 90 度，朝正下方為 180 度。

此外： $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$ (一)寫出 Cartesian coordinate 中的 x, y, z 與 ϕ, θ 的對應關係。(5 分)(二)求出此球面上法線向量 $\vec{N}$ 的表示式，以及在 $(0, R, 0)$ 這個點的法線向量。(10 分)

(三)用此設定驗證 Gauss theorem。(10 分)

(注意： $\int \sin^n ax dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} ax dx$ ，其中 a 為一正整數)

四、在二維 x - y 平面上給定向量場 $\vec{F}(x, y) = x^3\vec{i} + y^3\vec{j}$ 。(一)在二維 x - y 平面上的每個象限都至少挑選一個點，繪出 $\vec{F}$ 大致的空間分布。(5 分)(二)求出此向量場的輻合輻散場 D ，即 $D = \nabla \cdot \vec{F}$ ，並繪出 D 大致的空間分布。(6 分)(三)求出 D 的梯度場，即 ∇D ，並繪出此梯度場大致的空間分布。(6 分)(四)說明該梯度場與 $D = \text{常數}$ 所構成之等值線呈現何種關係。(3 分)

(請接背面)

類 科：氣象

科 目：應用數學（包括微積分、微分方程與向量分析）

五、求解下列微分方程式。（每小題 5 分，共 10 分）

$$(一) e^{x+2y} \frac{dy}{dx} = 5x$$

$$(二) \frac{dy}{dx} = \frac{2x^3 - y \cos(2x)}{0.5 \sin(2x)}$$

六、給定矩陣為：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$$

(一) 求出其特徵值 (eigenvalues)。(2 分)

(二) 設其特徵向量 (eigenvectors) 為 $\begin{pmatrix} V_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，求 V_1 之值。(3 分)

(三) 請將此矩陣對角化 (diagonalization)。(10 分)