

類 科：氣象

科 目：應用數學（包括微積分、微分方程與向量分析）

考試時間：2 小時

座號：\_\_\_\_\_

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、解釋名詞並說明它們之間的差異：（每小題 5 分，共 15 分）

(一)傅立葉級數 (Fourier series) 和傅立葉積分 (Fourier integral)

(二)線性微分方程式 (linear differential equation) 和非線性微分方程式 (nonlinear differential equation)

(三)初始值問題 (initial value problem) 和邊界值問題 (boundary value problem)

二、請解下列之初始值問題：（15 分）

$$y'' + 4y' + 4y = 5e^{-2x}, \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = 5$$

三、請解出下列週期函數 (periodic function) 的傅立葉級數。（15 分）

$$f(x) = \begin{cases} -5 & -\pi < x < 0 \\ 5 & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

四、請將下列方陣表示成對稱矩陣 (symmetric matrix) 和斜對稱矩陣 (skew-symmetric matrix) 的線性組合，並解出其特徵值與特徵向量。（15 分）

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 21 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$

五、令  $f = xz - yz$ ， $\mathbf{v} = [4z \quad 2y \quad x-z]$ ，和  $\mathbf{w} = [y^2 \quad y^2 - x^2 \quad 2z^2]$ 。請計算出下列函數：  
（每小題 2 分，共 10 分）(一)  $\nabla f$ (二)  $\nabla \cdot \mathbf{w}$ (三)  $\nabla \times \mathbf{v}$ (四)  $\nabla^2(xzf)$ (五)  $(\nabla \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}$ 

六、請利用拉普拉斯轉換解下列之積分方程式 (integral equation)。（15 分）

$$y(t) + \int_0^t y(\tau) d\tau = 2$$

七、請解下列問題：（15 分）

$$u_{xx} + u_x = 0, \quad u(0, y) = f(y), \quad u_x(0, y) = g(y).$$