

101年公務人員高等考試三級考試試題

代號：35920
36020
36120全一張
(正面)

類 科：電力工程、電子工程、電信工程

科 目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50 分)

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、若 $f(x) = x^2$ ， $-\pi \leq x \leq \pi$ 。求：(一) $f(x)$ 定義於 $[-\pi, \pi]$ 的傅立葉級數 (Fourier series) (9 分) (二) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (3 分)

(三) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ (3 分)

二、(一)若 λ 是一個非奇異 (nonsingular) 矩陣 A 的特徵值 (eigenvalue)， X 是 λ 對應的特徵向量 (eigenvector)，請證明 $\frac{1}{\lambda}$ 及 X 分別是 A^{-1} 的特徵值及其對應的特徵向量。(10 分)(二)若 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ，請用其最大的特徵值驗證(一)的結果。(5 分)三、藉由考慮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ 之收斂性，證明 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{r \cos \theta - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}$ ， $0 < r < 1$ 。(10 分)四、解 $(1+x^2)(dy-dx) = 2xydx$ ，條件為 $y(0) = 1$ 。(10 分)

乙、測驗題部分：(50 分)

代號：2303

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 解微分方程式 $y'' - 2y' + 2y = 0$ ；其中初值 $y(0) = -3$ ， $y\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0$ 。(A) $y = -3e^t \cos t$ (B) $y = -3\cos t$ (C) $y = -3e^{-t} \cos t$ (D) $y = -3\sin t$ 2 下列何者可為微分方程式 $(\sqrt{x^2 + y^2} / y + 2/x)dx + (\sqrt{x^2 + y^2} / x + 2/y)dy = 0$ 之積分因子？(A) x^2 (B) y^2 (C) xy (D) $1/xy$ 3 已知 $\vec{F} = y^3\vec{i} + x^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ ，求出 $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dA$ 之值，其中 $S: x^2 + 4y^2 = 4$ ， $x \geq 0$ ， $y \geq 0$ ， $0 \leq z \leq b$ 。(A) $2\pi b^3$ (B) $\frac{1}{2}\pi b^3$ (C) $\frac{1}{2}\pi b^2$ (D) $\frac{1}{8}\pi b^3$ 4 令 $\vec{v}$ 為一常數向量， $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ，則 $\nabla(\vec{v} \cdot \vec{u}) + \nabla \times (\vec{u} - \vec{v})$ 等於多少？(A) 0 (B) $\vec{u} + \vec{v}$ (C) $\vec{u}$ (D) $\vec{v}$ 5 橢圓 $x^2 + 4(y-1)^2 = 4$ 在點 $P(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}})$ 的切線為何？(A) $\sqrt{2}(1-t)\vec{i} + (\frac{1}{\sqrt{2}} + 1+t)\vec{j}$ (B) $\sqrt{2}(1-t)\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}+1+t)\vec{j}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2}-t)\vec{i} + (1+t)\vec{j}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1-t)\vec{i} + (\sqrt{2}+1+t)\vec{j}$ 6 若 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ，請求出 $A^3 - 7A^2 + 11A - 4I = ?$ (A) 0 (B) I (單位矩陣 identity matrix) (C) A

(D) $\begin{bmatrix} 12 & 11 & 5 \\ 4 & 13 & 17 \\ 14 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

(請接背面)

類 科：電力工程、電子工程、電信工程
科 目：工程數學

- 7 試問二次式 (quadratic form) : $4x_1^2 - 4x_2^2 + 6x_1x_2 = 8$ 在 (x_1, x_2) -平面上是哪一種曲線？
(A)圓 (circle) (B)橢圓 (ellipse) (C)雙曲線 (hyperbola) (D)拋物線 (parabola)
- 8 設 x_1, x_2, x_3 為下列聯立方程組之解，

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= -4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$
則 $x_1 + x_2 + x_3$ 等於多少？
(A) -1 (B) 4 (C) $6\frac{1}{2}$ (D) $9\frac{2}{3}$
- 9 試求函數 $F(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2}$ 的反拉普拉斯轉換 (inverse Laplace transform) 。
(A) $\frac{1}{2}(\sin t + t \cos t)$ (B) $\frac{1}{2}(\sin t - t \cos t)$ (C) $\frac{1}{2}(\cos t - t \sin t)$ (D) $\frac{1}{2}(\cos t + t \sin t)$
- 10 $g(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } t < 3 \\ t^2, & \text{if } t \geq 3 \end{cases}$ ，下列何者為 $g(t)$ 的拉普拉斯轉換 $L\{g(t)\}$ ？
(A) $(\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s})e^{3s}$ (B) $(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{6}{s})e^{3s}$ (C) $(\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s})e^{-3s}$ (D) $(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{6}{s})e^{-3s}$
- 11 反拉普拉斯轉換 $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 2s + 5}\right)$ 等於下列何者？
(A) $\sin 2(t - 1)$ (B) $e^t \cos(2t)$ (C) $e^{-t} \cos(2t)$ (D) $\frac{1}{2}e^{-t} \sin(2t)$
- 12 有一函數 $f(x) = x + \pi$ ，其中 $-\pi < x < \pi$ 且 $f(x + 2\pi) = f(x)$ ，求其傅立葉級數為何？
(A) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{2}{n} \cos n\pi) \sin nx$ (B) $f(x) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{2}{n} \cos n\pi) \sin nx$
(C) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{n} \cos n\pi) \sin nx$ (D) $f(x) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{n} \cos n\pi) \sin nx$
- 13 利用傅立葉級數的觀念求出等式 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2n\pi}{T}t}$ 中 c_n 的值，其中 $\delta(t)$ 為 Dirac delta 函數， T 是固定的週期。
(A) $\frac{1}{T}$ (B) $-\frac{1}{T}$ (C) $\frac{2}{T}$ (D) $-\frac{2}{T}$
- 14 定義函數 $f(t)$ 的傅立葉轉換 (Fourier transform) 為 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ 。求 $f(t)\sin(\omega_0 t)$ 的傅立葉轉換為何？
(A) $\frac{i}{2}(F(\omega + \omega_0) - F(\omega - \omega_0))$ (B) $\frac{1}{2}(F(\omega + \omega_0) - F(\omega - \omega_0))$ (C) $\frac{1}{2}(F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0))$ (D) $\frac{i}{2}(F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0))$
- 15 級數 $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10^n} (x - 5)^n$ 的收斂半徑 (radius of convergence) 為何？
(A) 1/10 (B) 1/5 (C) $\sqrt{10}$ (D) 10
- 16 求 $\int \sin(3z)\cos(3z)dz = ?$
(A) $\frac{1}{6}\sin^2 3z + c$ (B) $\sin^2 3z + c$ (C) $6\sin^2 3z + c$ (D) $3\sin^2 3z + c$
- 17 求 $\frac{da^z}{dz} = ?$
(A) a^z (B) $a^z \ln a$ (C) $\ln a$ (D) $a^z / \ln a$
- 18 極座標之二維位能函數 (potential function) $u(r, \theta)$ 滿足 Laplace's 方程式 $\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$ ，若 u 與 θ 無關，亦即 $u = u(r)$ ，則下列何者可能為其解？
(A) $u = \frac{1}{r}$ (B) $u = \ln r$ (C) $u = e^{-r}$ (D) $u = re^{-r}$
- 19 給定一個隨機變數 X ，已知期望值 (mean) $E[X] = 2$ ， $E[X(X - 4)] = 5$ ，則 $12 - 4X$ 的變異值 (variance) 為何？
(A) 4 (B) 13 (C) 17 (D) 144
- 20 給定一個連續隨機變數 X ，它的機率密度函數為 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{50\pi}} e^{-\frac{x^2}{50}}$ ， $-\infty < x < \infty$ 。則 X^3 的期望值 (mean) 為何？
(A) 0 (B) 3 (C) 25 (D) 50