

110年公務人員特種考試警察人員、一般警察人員、
國家安全局國家安全情報人員考試及110年特種考試
交通事業鐵路人員、退除役軍人轉任公務人員考試試題

考試別：鐵路人員考試
等別：高員三級考試
類科組別：電力工程、電子工程
科目：工程數學
考試時間：2小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50分)

- (一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、利用拉氏轉換(Laplace transform)求解。(10分)

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 2y = f(t), \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 1, \quad y(0) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t \leq \pi \\ 0, & t > \pi \end{cases}$$

二、設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 12 & -11 & 12 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

(一)求 A 的 3 個特徵值(eigenvalues)。(10分)

(二)求 $A^5 + A^4 - 4A^3 + 4A^2 - 4A + 4I$ ，其中 I 為單位矩陣。(5分)

三、令 $\Gamma(t) = 3e^{it}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ，求 $\int_{\Gamma} \text{Im}(z) dz$ 。(10分)

(其中 $\text{Im}(z)$ 代表複數 z 的虛部(imaginary part))

四、定義函數 $f(t)$ 的傅立葉轉換(Fourier transform)為

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad j = \sqrt{-1}$$

(一)求函數 $f_1(t) = e^{-5|t|}$ 的傅立葉轉換 (Fourier transform)。(5分)

(二)求函數 $f_2(t) = (\cos 100t) e^{-5|t|}$ 的傅立葉轉換 (Fourier transform)。(10分)

乙、測驗題部分：(50 分)

代號：5703

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

- 1 一座山距離海平面的高度可用 $z(x, y) = 3500 - 2x^2 - 3y^2$ 來表示，試求出在 $P(-3, 2)$ 這點朝上坡最陡峭的方向？

(A) [12, 12] (B) [-12, -12] (C) [12, -12] (D) [-12, 12]

- 2 一平行六面體(parallelepiped)的三個不互相平行的邊緣向量分別是 $[2, 0, 3]$ 、 $[0, 4, 1]$ 、 $[5, 6, 0]$ ，試求此一平行六面體的體積。

(A) 144 (B) 72 (C) 36 (D) 12

- 3 考慮向量 $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 和 $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 。若 u 可分解為 $u_1 + u_2$ ，其中 u_1 為 u 在 v 的投影(projection)，則 u_2 為何？

(A) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ -1.5 \end{bmatrix}$

- 4 令矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ，則 $A^T A$ 的秩數(rank)為何？

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

- 5 令矩陣 $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 9 \\ 3 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix}$ 。下列何者不是 X 的特徵值(eigenvalue)？

(A) 1 (B) 2 (C) -1 (D) -4

- 6 下列函數何者可以執行線性轉換？

(A) $T(x, y) = \langle x - y, \sin(x - y) \rangle$ (B) $T(x, y, u, v, w) = \langle u - v - w, w + u, z, 0, 1 \rangle$
(C) $T(x, y) = \langle x - y, x + y, 2xy, 2y, x - 2y \rangle$ (D) $T(x, y, w) = \langle 4y - 2x, y + 3x, 0, 0 \rangle$

- 7 令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，則矩陣函數 e^A 的像空間(image space)維度為何？

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

- 8 考慮初始值問題 $\frac{dy}{dx} + x^2 y = \cos(\pi x)$, $y(1) = 1$ 。若 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 為此微分方程式的級數解，則係數 a_2 為何值？

(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) $+\frac{\pi^2}{2}$

- 9 李卡地方程式(Riccati equation) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x}y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{6}{x}$ 可利用下列何種公式轉換為以 u 為未知數的線性微分方程式？
 (A) $y = -3 + \frac{1}{u}$ (B) $y = 3 + \frac{1}{u}$ (C) $y = -5 + \frac{1}{u}$ (D) $y = 5 + \frac{1}{u}$
- 10 一微分方程式 $y'' - 2y' = 6e^{2x} - 4e^{-2x}$ 的起始條件分別為 $y(0) = -1$ 及 $y'(0) = 6$ ，其解為 $y(x) = ae^{2x} + bxe^{2x} + ce^{-2x} + d$ ，試問下列何者不正確？
 (A) $a = -1$ (B) $b = 3$ (C) $c = -\frac{1}{2}$ (D) $d = -\frac{3}{2}$
- 11 令 $f(t) = \cos(\pi t)\delta(t-1)$ ，其中 $\delta(t)$ 為脈衝函數(impulse function)， $f(t)$ 的拉氏轉換(Laplace transform)為何？
 (A) $-e^{-s}$ (B) e^{-s} (C) $-e^s$ (D) 0
- 12 某函數 $f(t) = Ae^{-t}\cos(2t) + Be^{-t}\sin(2t)$ ，對應的拉氏轉換為 $F(s) = \frac{2s+5}{s^2+as+b}$ ， A, B, a, b 為實數。 $\frac{a}{b}$ 為何值？
 (A) 5 (B) 2 (C) 1 (D) 0.4
- 13 一微分方程式 $y'' + 4y = f(t)$ ，其中 $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq t < 4 \\ 3 & \text{for } t \geq 4 \end{cases}$ ，其起始條件分別為 $y(0) = 1$ 及 $y'(0) = 0$ ，其解為 $y(t) = \cos(at) + b(c - \cos(d(t-4)))H(t-4)$ ，其中 $H(t)$ 是 Heaviside 或 unit step 函數，試問下列何者不正確？
 (A) $a = 2$ (B) $b = \frac{3}{2}$ (C) $c = 1$ (D) $d = 2$
- 14 一函數 $f(t) = 5[H(t-3) - H(t-11)]$ ，其中 $H(t)$ 是 Heaviside 或 unit step 函數，其傅立葉轉換(Fourier Transform)為 $F(\omega) = \frac{a}{b\omega}e^{-ic\omega}\sin(d\omega)$ ，試問下列何者不正確？
 (A) $a = 10$ (B) $b = 1$ (C) $c = -7$ (D) $d = 4$
- 15 給定一複變函數(complex function) $f(z) = \frac{z+i}{\sin(z)}$ ，則此函數在 $z=0$ 的殘餘數(residue)為何？
 (A) 0 (B) 1 (C) $-i$ (D) i
- 16 考慮複變函數 $f(z) = \frac{\sin(z)}{z^2(z^2+1)}$ ，若 C 為逆時針方向繞圓周 $|z-0.5i|=1$ 的路徑。則線積分 $\oint_C f(z)dz$ 為下列何值？
 (A) $2\pi i - \pi \sin(i)$ (B) $-2\pi i + \pi \sin(i)$ (C) $2\pi i$ (D) $-2\pi i$
- 17 找出複變函數級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2i}{5+i}\right)^n (z+3-4i)^n$ 的收斂半徑。
 (A) $\sqrt{26}$ (B) $\frac{\sqrt{26}}{2}$ (C) $\sqrt{13}$ (D) $\frac{\sqrt{13}}{2}$

- 18 設 X 為一連續隨機變數，其機率密度函數(probability density function)為 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & x \in (-a, a) \\ 0, & x \notin (-a, a) \end{cases}$ 。
- 若 X 的變異數(variance)為 4，則 a 值為何？
- (A) $2\sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{3}$ (C) 4 (D) $4\sqrt{3}$
- 19 設 X 為一具有常態分布(normal distribution)的連續隨機變數，其平均值(mean)為 1，標準差(standard deviation)為 2。若將其標準化為平均值為 0，標準差為 1 的標準常態分布(standard normal distribution)，對應的隨機變數為 Z 。則 X 和 Z 的關係式為何？
- (A) $Z = \frac{1}{4}(X - 1)^2$ (B) $Z = \frac{1}{2}X - 1$ (C) $Z = \frac{1}{2}(X - 1)$ (D) $Z = (X - 1)$
- 20 將四個硬幣先後向上投擲後落地，會有十六種不同結果。定義一隨機變數 X ， X 等於每一個結果中硬幣人像朝上的個數，試問下列何者不正確？
- (A) $X=3$ 的機率，即 $P(X = 3) = 0.25$ (B) $X=2$ 的機率，即 $P(X = 2) = 0.375$
- (C) X 的平均值是 2 (D) X 的變異數是 1.5