

等 別：四等考試

類 科：天文

科 目：微積分

考試時間：1 小時 30 分

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)下列各個題目必須詳列解題的過程。

一、計算下列各個題目：

$$(一) \int_0^1 x e^{-x^2} dx = ? \quad (15 \text{ 分})$$

$$(二) \frac{d}{dx} \frac{x}{x-1} = ? \quad (15 \text{ 分})$$

二、假如 T 是一個四面體，並且它的四個角分別為 $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ 和 $(0,0,1)$ 。求 $I = \iiint_T y dV$ 。(15 分)三、試問當 $x \geq 0$ 時，什麼函數的馬克勞林 (Maclaurin) 級數是

$$1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n ?$$

(請證明你的答案是正確的。)(10 分)

四、假如函數 f 在閉區間 $[0,1]$ 是連續的，並且對於每一個 x 在閉區間 $[0,1]$ 內， $0 \leq f(x) \leq 1$ 。請證明在閉區間 $[0,1]$ 內必定存在一個實數 c 滿足 $f(c) = c$ 。(15 分)五、已知函數 $f(x, y) = 4x - 8xy + 2y + 1$ 是在被直線 $x=0$, $y=0$ 和 $x+y=1$ 所包圍且在第一象限的三角形板上。求函數 $f(x, y)$ 在所給的範圍下的絕對極大值和絕對極小值。

(15 分)

六、有一個以點 $(b, 0)$ 為中心且半徑為 a 的圓盤，其中 $b > a > 0$ 。將這個圓盤繞著 y 軸旋轉後形成甜甜圈，求該甜甜圈的體積。(15 分)