

111年公務人員高等考試三級考試試題

類 科：電力工程、電子工程

科 目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：可以使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、我們考慮空間中的三個向量： $\vec{a} = (-3, -2, 1)$ 、 $\vec{b} = (2, 4, -5)$ 、 $\vec{c} = (-1, -1, 3)$ 。

（每小題 6 分，共 12 分）

(一)請計算 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 所圍出的平行四邊形的面積。

(二)請計算 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 所圍出的平行六面體的體積。

二、考慮如下所示之初始值問題（initial-value problem）： $\left(y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \right)$

$$\begin{cases} \text{微分方程式：} y'' + 3y' + 2y = x \\ \text{初始條件：} y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$$

（每小題 7 分，共 14 分）

(一)請求出本題目中之微分方程式的齊次解（homogeneous solution），該齊次解應為一般形式（general form）解。

(二)請求出本初始值問題的精確解（exact solution）。

三、我們準備從一疊標準的撲克牌[共 52 張牌，沒有鬼牌（Joker）]裡面來隨機抽牌。（每小題 6 分，共 12 分）

(一)假設我們的抽牌方式是：抽牌看了結果以後會把牌再放回原來那疊撲克牌裡面；在這種情況之下，我們會剛好第 6 次抽牌的時候首度抽到王牌（ACE）的機率為何？

(二)假設我們的抽牌方式是：抽牌看了結果以後不會把牌放回原來那疊撲克牌裡面（也就是會把牌往旁邊擺）；在這種情況之下，我們會剛好第 6 次抽牌的時候首度抽到王牌（ACE）的機率為何？

四、在本題目中，我們考慮複變函數（complex-valued function）沿著曲線（contour）做積分（integral）的問題。我們用 Γ 代表在複數平面上的單位圓（也就是以座標系的原點為圓心而且半徑為 1 的圓）之中從 $1+i\cdot 0(i=\sqrt{-1})$ 以逆時針方向繞一圈走回到原出發點的曲線。請計算下列兩個積分的結果。（每小題 6 分，共 12 分）

$$(一) \int_{\Gamma} z \, dz = ?$$

$$(二) \int_{\Gamma} \frac{1}{z} \, dz = ?$$

乙、測驗題部分：（50 分）

代號：2370

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆 在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 假設 A 與 B 為維度相同之方陣（square matrix）且 $A, B, A+B$ 均為可逆（invertible）矩陣，則下列何者不一定為可逆矩陣？

(A) $A^T B$

(B) $I + AB$

(C) $I + A^{-1}B$

(D) $I + AB^{-1}$

2 假設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & 3 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ ，則行列式值 $\det(2A^T B^{-1})$ 為何？

(A) $\frac{12}{17}$

(B) $-\frac{12}{17}$

(C) $-\frac{48}{17}$

(D) $\frac{48}{17}$

3 若 $P_{B \rightarrow B'} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 為從 $\mathbb{R}^3$ 的基底 B 轉換至基底 $B' = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ 之轉移矩陣（transition matrix），則 $B = ?$

(A) $\{(3,2,2), (2,1,0), (4,4,1)\}$

(B) $\{(3,4,2), (2,1,2), (2,0,1)\}$

(C) $\{(3,1,2), (1,2,1), (4,1,4)\}$

(D) $\{(3,2,1), (1,2,0), (2,1,0)\}$

4 下列那一個矩陣無法被對角化（diagonalizable）？

(A) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

5 下列那一組 $\mathbf{R}^3$ 中之向量基於歐幾里得內積（Euclidean inner product）可作為規格化正交基底（orthonormal basis）？

(A) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(B) $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

(C) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

(D) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

6 設 T 是 $\mathbf{R}^3$ 到 $\mathbf{R}^2$ 的線性轉換， $T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ， $T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ， $T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ， $T\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ，下列

何者正確？

(A) $a - b = 8$

(B) $a - b = 10$

(C) $a + b = 10$

(D) $a + b = 8$

7 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 2 & -1 \\ 6 & -2 & 4 & 14 \end{bmatrix}$ 的 LU 分解（LU decomposition），可化為 $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -2x \end{bmatrix}$ ， $x = ?$

(A) $x = 1$

(B) $x = 2$

(C) $x = 3$

(D) $x = 4$

8 設 α 和 β 為矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ 之特徵值（eigenvalues），則 $\alpha\beta + \alpha + \beta = ?$

(A) 3

(B) 4

(C) 5

(D) 6

9 定義 $i = \sqrt{-1}$ ，若 $z = a + bi$ 為 $z^2 - (6 - 2i)z + 17 - 6i = 0$ 之一解，且 $ab > 0$ ，則 $a^2 + b^2 = ?$

(A) 13

(B) 15

(C) 18

(D) 20

10 定義 $i = \sqrt{-1}$ ，複變數 $z = x + iy$ 與其共軛複數 $\bar{z} = x - iy$ 。下列那一個複變函數為完整（entire），即在整個複數平面皆為可解析（analytic）？

(A) $f(z) = iz\bar{z}$

(B) $f(z) = x^2 + y^2 + i2xy$

(C) $f(z) = e^{-x}(\cos y - i \sin y)$

(D) $f(z) = \bar{z}$

11 複變級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^n}$ 之收斂半徑（radius of convergence）為何？（ $i = \sqrt{-1}$ ）

(A) 1

(B) ∞

(C) 0

(D) $\frac{1}{2}$

- 12 計算 $\int_{\gamma} \bar{z} dz = ?$ 其中軌跡 $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$ 。 ($i = \sqrt{-1}$)
(A) $-\pi i$ (B) πi (C) $-2\pi i$ (D) $2\pi i$
- 13 一階常微分方程式 $e^{x+y} y' = 3x$, 下列何者為正確的解答? ($y' = \frac{dy}{dx}$)
(A) $e^{-y} = -3e^{-x}(x+1) + c$, 其中 c 為常數 (B) $e^y = -3e^x(x+2) + c$, 其中 c 為常數
(C) $e^y = -3e^{-x}(x+1) + c$, 其中 c 為常數 (D) $e^{-y} = -3e^{-x}(x+2) + c$, 其中 c 為常數
- 14 二階微分方程式 $x^2 y'' - 9xy' + 24y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 10$, 設 $y = ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3$ 為其解, 下列何者正確? ($y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$)
(A) $a = 1$ (B) $b = -1$ (C) $c = -2$ (D) $d = -4$
- 15 反拉普拉斯轉換 (inverse Laplace transform) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s-3}{s^2+2s+2} + \frac{s}{s^2+2s+1} \right\} = e^{-t}(a \cos t + b \sin t + ct + d)$, a, b, c, d 為常數, 則:
(A) $a+b+c+d = -3$ (B) $a+b+c+d = -4$ (C) $a+b+c+d = 3$ (D) $a+b+c+d = 4$
- 16 假設 $f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s-1)^2} \right\}$, 其中 $\mathcal{L}^{-1}$ 為反拉普拉斯轉換 (inverse Laplace transform), 下列何者正確?
(A) $f(0) = -1$ (B) $f(0) = 1$ (C) $f(1) = -1$ (D) $f(1) = 1$
- 17 定義傅立葉轉換 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$, 令 $f(x) = \begin{cases} 5, & -3 \leq x \leq 3 \\ 0, & x < -3 \text{ 或 } x > 3 \end{cases}$, $F(\omega) = ?$ ($i = \sqrt{-1}$)
(A) $\frac{6}{\omega} \sin(5\omega)$ (B) $\frac{6}{\omega} \cos(5\omega)$ (C) $\frac{10}{\omega} \sin(3\omega)$ (D) $\frac{10}{\omega} \cos(3\omega)$
- 18 若 X 為一連續均勻分布 (uniformly distributed) 在區間 $(0, 20)$ 之隨機變數, 可計算得知 $X < 10$ 之機率為 a , $X > 12$ 之機率為 b , $8 < X < 16$ 之機率為 c , 則 $a+b+c = ?$
(A) $\frac{11}{10}$ (B) $\frac{6}{5}$ (C) $\frac{13}{10}$ (D) $\frac{7}{5}$
- 19 將一副正常的撲克牌 (52 張牌包含四種花色: 黑桃、方塊、紅心、梅花, 每種花色各 13 張牌, ACE 為各花色點數 1 的牌) 隨機均分為 4 疊, 每疊各 13 張牌。這四疊牌每疊恰好包含一張 ACE 牌的機率為何?
(A) $\frac{1}{13}$ (B) $\frac{927}{2550}$ (C) $\frac{783}{2450}$ (D) $\frac{2197}{20825}$
- 20 設 X 和 Y 為連續隨機變數, 其聯合機率密度函數 (joint probability density function)
 $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 令 $W = Y/X$, 期望值 $E(W) = ?$
(A) $1/2$ (B) 1 (C) $3/2$ (D) 2