

大學入學考試中心
九十三學年度指定科目考試試題
敏督利颱風受災地區考生補救考試
數學甲

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：第壹部分請用 2B 鉛筆在答案卡之「解答欄」內作答，選擇題答錯均倒扣。

修正時應以橡皮擦拭，請勿在答案卡上使用修正液。第貳部分作答於「非選擇題答案卷」，請在規定之欄位作答，並於題號欄標明題號。

作答示例：請仔細閱讀下面的例子。

(一) 選擇題：只用 1, 2, 3, 4 等四個格子，而不需要用到 $-$, $\pm$, 以及 5, 6, 7, 8, 9, 0 等格子。

例：若第 1 題為單選題，選項為(1)3 (2)5 (3)7 (4)9，而正確的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列的 $\boxed{3}$ 劃記（注意不是 7），如：

解 答 欄													
1	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	$\boxed{0}$	$\boxed{-}$	$\boxed{\pm}$	

例：若第 10 題為多選題，正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡的第 10 列的 $\boxed{1}$ 與 $\boxed{3}$ 劃記，如：

10	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	$\boxed{0}$	$\boxed{-}$	$\boxed{\pm}$
----	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	---------------

(二) 選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\boxed{-}$ 與第 21 列的 $\boxed{7}$ 劃記，如：

20	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	$\boxed{0}$	$\boxed{-}$	$\boxed{\pm}$
21	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	$\boxed{0}$	$\boxed{-}$	$\boxed{\pm}$

祝考試順利

第壹部分（佔 76 分）

一、單選題（12 %）

說明：第1至2題，每題選出一個最適當的選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題答對得6分，答錯或劃記多於一個選項者倒扣2分，倒扣到本大題之實得分數為零為止。未作答者，不給分亦不扣分。

1. 坐標平面上 $x^2 + xy + y^2 = 1$ 的圖形和 $4xy = 1$ 的圖形的關係是
 - (1) 相離
 - (2) 交於一點
 - (3) 交於兩點
 - (4) 交於四點

2. 一莫耳的粒子數是 6×10^{23} 個，地球半徑為 6400 公里。假設一立方公分的容積可以裝 100 粒米，若將 10 莫耳的米均勻灑在地球上(把地球表面想像成球面)，其高度最接近下列哪個選項？（半徑為 R 的球之表面積公式為 $4\pi R^2$ ）
 - (1) 一本書的厚度
 - (2) 一個人的高度
 - (3) 總統府的高度
 - (4) 玉山的高度

二、多 選 題 (56 %)

說明：第3至9題，每題各有4個選項，其中至少有一個是正確的。選出正確選項，標示在答案卡之「解答欄」。每題8分，各選項獨立計分，每答對一個選項，可得2分；每答錯一個選項，倒扣2分，完全答對得8分。整題未作答者，不給分亦不扣分。若在備答選項以外之區域劃記，一律倒扣2分。倒扣到本大題之實得分數為零為止。

3. 設 a, b 為整數，滿足 $\frac{1}{143} = \frac{a}{11} + \frac{b}{13}$ 。下列選項有哪些是正確的？

- (1) a, b 除 ± 1 外無公因數
- (2) 若 $|a| < 11$ ，則 $|b| < 13$
- (3) 若 $|a| > 11$ ，則 $|b| > 13$
- (4) $|a| < |b|$

4. 若 α, β 是不等於 $\frac{\pi}{2}$ 的正實數，且 $\alpha + \beta < \pi$ ，下列哪些選項恆正？

- (1) $\sin \alpha + \sin \beta$
- (2) $\cos \alpha + \cos \beta$
- (3) $\tan \alpha + \tan \beta$
- (4) $\cot \alpha + \cot \beta$

5. 坐標平面上有兩圓，方程式分別為 $x^2 + y^2 = 1$ 與 $(x-4)^2 + y^2 = 9$ 。
下列哪些直線是這兩圓的公切線？

(1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y = 1$

(2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 1$

(3) $-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1$

(4) $x = 1$

6. 甲投擲一公正銅板 8 次，下列選項有哪些是正確的？

(1) 會正好得到正面 4 次及反面 4 次。

(2) 若前 4 次得到正面 4 次，則後 4 次得到正面 4 次的機率小於得到反面 4 次的機率。

(3) 恰好得到 4 次正面及 4 次反面的機率大於 $\frac{1}{4}$ 。

(4) 若已知擲完銅板共出現正面 4 次與反面 4 次，則投擲過程是正反面交錯出現的機率大於投擲過程是正面集中在前 4 次或後 4 次的機率。

7. 英國某實驗室研究一金屬圓柱（原高 70.5 英寸）
在不同負重下對柱高的影響，其實驗結果如下：

$$\begin{array}{llll} (0, 70.5) & (2, 69.4) & (4, 68.4) & (6, 67.2) \\ (8, 66.3) & (10, 65.5) & (12, 64.4) & \end{array}$$

其中測量單位分別為英噸和英寸。

將此筆資料的相關係數記為 r ，以最小平方法決定的直線斜率記為 m 。

現為提供台灣廠商資料，將單位轉換為公噸（1 英噸等於 1.016 公噸）

及公分（1 英寸等於 2.54 公分），若單位換算後該資料的相關係數記為 R ，
以最小平方法決定的直線斜率記為 M 。下列關係有哪些是正確的？

- (1) $r \cdot m > 0$
- (2) $r > 0$
- (3) $r = R$
- (4) $m = M$

8. 考慮如下三元一次方程組，其中 k 是一正實數。

$$\begin{array}{rcl} (\log k)y - z & = & -2 \\ (\log(k^2))x + y - 4z & = & -9 \\ -2x + y + 2z & = & 6 \end{array}$$

下列選項有哪些是正確的？

- (1) 若 $k=1$ 時，則方程組恰有一解
- (2) 若 $k=\sqrt{10}$ 時，則方程組有解
- (3) 若 $k=10$ 時，則方程組有解
- (4) 若 $k=100$ 時，則方程組無解

9. 假設 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是一個轉移矩陣 (即每行之和皆為 1)，且 $A^2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$ 。

請選出正確的選項。

(1) 如果 $a = \frac{1}{3}$ ，則 $d = \frac{1}{3}$

(2) 如果 $a = \frac{2}{3}$ ，則 $d = \frac{1}{2}$

(3) $ad - bc > 0$

(4) $b = c$

三、選填題 (8 %)

說明：A 為選填題，請在答案卡的「解答欄」之列號 (10-11) 中標示答案，每一格完全答對得 4 分。答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. n 是正整數，坐標平面上一點 $(\sqrt{n+5}, \sqrt{n-1})$ 到直線 $y - x = 0$ 的距離是 d_n ，
此點和 $(0, 0)$ 及 $(\sqrt{n-1}, \sqrt{n+5})$ 所構成的三角形面積為 a_n ，

則 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \underline{\textcircled{10}}$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\textcircled{11}}$ 。

—— ———— 以下部分作答於答案卷 ————

第貳部分：非選擇題（佔 24 分）

說明：本大題共有二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號（一、二），同時必須寫出演算過程或理由，否則將酌予扣分。每題配分標於題末。

一、銳角三角形 ABC ， D 為 $\overline{BC}$ 上一點，令 $\overline{AC} = b$ 、 $\overline{AB} = c$ 、 $\overline{BD} = d$ 、 $\overline{CD} = e$ 。
假設 $c^2 - d^2 = b^2 - e^2$ ，求證 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 垂直。（12 分）

二、若一圓與一拋物線在一點有共同之切線，則稱此圓與此拋物線相切。
現假設拋物線 $y = x^2 + 1$ 與一圓在兩點相切，已知其中一切點為 $(1, 2)$ 。

(1) 求過切點 $(1, 2)$ 的切線方程式。（4 分）

(2) 由拋物線圖形與圓之對稱性，知此圓之圓心在拋物線的對稱軸上。
求此圓之圓心坐標。（8 分）