

等 別：三等考試

類 科：電力工程、電子工程、電信工程

科 目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、設 $\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}$ ，其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。

(一)試求矩陣 A 特徵值 λ_1, λ_2 。（2 分）

(二)若 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ ，試求矩陣 P 。（3 分）

(三)求解 $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ ， $t \geq 0$ 。（10 分）

二、設曲線 C 的參數表示式為 $x = 2\cos(t)$ ； $y = 2\sin(t)$ ； $z = 3$ ，其中 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ，而沿其 C 曲線之質量密度函數（mass density function）為 $\delta(x, y, z) = xy^2$ ，求其質量中心為何。（15 分）

三、令 f 及 g 為向量空間 $C[a, b]$ 上之實數連續函數，定義 $C[a, b]$ 上的內積為 $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ 。設 $f(x) = x$ ， $g(x) = x^2$ ， $a = 0$ ， $b = 1$

(一)求 $\|f\|$ 。（5 分）

(二)求 f 與 g 間之距離 $d(f, g)$ 。（5 分）

四、隨機變數 X 之期望值（expected value） $E(X) = 2$ ，變異數（variance） $\text{Var}(X) = 4$ ，求：

(一) $E[(3+2X)^2] = ?$ （5 分）

(二) $\text{Var}[5+3X] = ?$ （5 分）

乙、測驗題部分：（50分）

代號：7341

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共20題，每題2.5分，須用2B鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 下列何者為函數 $f(t) = \cos(2t + 10)$ 之拉氏轉換？

(A) $\frac{1}{s^2 + 4} [s \cos(10) - 2 \sin(10)]$

(B) $\frac{1}{s^2 + 4} [\cos(10) - 2 \sin(10)]$

(C) $\frac{2}{s^2 + 4} [s \cos(10) - \sin(10)]$

(D) $\frac{1}{s^2} [s \cos(10) - 2 \sin(10)]$

2 已知 $y_1 = x^2$ 及 $y_2 = x - 1$ 為 $(x^2 - 2x)y'' + 2(1 - x)y' + 2y = 0$ 之兩獨立解。則下列何者為 $(x^2 - 2x)y'' + 2(1 - x)y' + 2y = 6(x^2 - 2x)^2$ 之通解？

(A) $c_1 x^2 + c_2 (x - 1) + x^4 - 4x^3$ ，其中 c_1 及 c_2 為任意常數

(B) $c_1 x^2 + c_2 (x - 1) - \frac{27}{10} x^6 + \frac{61}{5} x^5 - 9x^4$ ，其中 c_1 及 c_2 為任意常數

(C) $c_1 x^2 + c_2 (x - 1) - \frac{1}{5} x^6 + \frac{21}{5} x^5 - 9x^4$ ，其中 c_1 及 c_2 為任意常數

(D) $c_1 x^2 + c_2 (x - 1) - 5x^4 + 8x^3$ ，其中 c_1 及 c_2 為任意常數

3 已知微分方程式 $y' + \alpha y = g(x)$ 的通解為 $y(x) = ce^{-3x} + 2xe^{-3x}$ ，其中 α 、 c 為常數， $g(x)$ 為未知函數，求 α 及 $g(x)$ 。

(A) $\alpha = -3, g(x) = 2xe^{-3x}$

(B) $\alpha = -3, g(x) = 4e^{-3x}$

(C) $\alpha = 3, g(x) = 2e^{-3x}$

(D) $\alpha = 3, g(x) = 4xe^{-3x}$

4 函數 $f(t)$ 之拉氏轉換 (Laplace transform) 為 $L\{f(t)\}$ ，令 $F(s) = L\left\{\int_0^t e^{-3\tau} \cos 2(t - \tau) d\tau\right\}$ ，則 $F(2)$ 等於何值？

(A) 1/40

(B) 1/20

(C) 1/4

(D) 1/2

5 已知微分方程式 $x^2 y' + 3xy = \frac{1}{x}$ ， $x > 0$ ， $y(1) = -1$ ，其解為：

(A) $y = x^2 - 2x^{-3}$

(B) $y = x^2 + 2x^{-3}$

(C) $y = x^{-2} - 2$

(D) $y = x^{-2} - 2x^{-3}$

- 6 令複數 $z = x + iy$ ，則方程式 $z^2 + \bar{z}^2 = 2$ 之幾何圖形為何？
- (A) 橢圓 (B) 拋物線 (C) 圓形 (D) 雙曲線
- 7 設複數 $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ ，則 z^{40} 之值為何？
- (A) 1 (B) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$
- 8 假設複數 $z = x + iy$ ，已知 $z^c = e^{c \log z}$ ，其中 c 為任意複數值 (complex number)，試問 $(-i)^i$ 的主要值 (principal value) 為何？
- (A) $e^{-\frac{\pi}{2}}$ (B) 1 (C) $e^{\frac{\pi}{2}}$ (D) 0
- 9 假設路徑 C 為一逆時針方向的半圓形封閉路徑的邊界，其數學定義式為 $z = 2e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$)，試求 $\int_C \frac{z+2}{z} dz$ 之值。
- (A) $2\pi i$ (B) $4\pi i$ (C) $4 + 2\pi i$ (D) $-4 + 2\pi i$
- 10 有一曲面 $z^2 = x^2 - y^2$ ，下列何者為經過點 $(1, 1, 1)$ 且為該曲面之法線向量？
- (A) $2i - 2j - 2k$ (B) $2i + 2j - 2k$ (C) $-2i + 2j - 2k$ (D) $-2i - 2j - 2k$
- 11 在溫度場 (temperature field) 中，已知熱流 (heat flow) 之方向為溫度變小最急遽 (maximum decrease) 的方向，今有一溫度場 $T(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2}$ ，其於點 $P(0, 1, 2)$ 之熱流方向為何？
- (A) $[0, 4, -1]$ (B) $[0, -4, 1]$ (C) $[1, 0, 4]$ (D) $[-1, 0, -4]$
- 12 下列何者為線積分 $\int_C xyz ds$ 之值？其中 C 的參數化表示式為 $x = 2t$ ； $y = 2t$ ； $z = t + 3$ ，而 $0 \leq t \leq 1$ ， $S(t)$ 為曲線 C 之長度函數。
- (A) 15 (B) $15\sqrt{2}$ (C) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{15}{2}$
- 13 設 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，試求矩陣 $\mathbf{A}$ 與 $\mathbf{B}$ 之秩 (rank) 相加值為何？
- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

14 下列何者錯誤？

(A) 在 R^2 空間中，0 向量正交於所有的向量

(B) 在 R^3 空間中，0 向量正交於所有的向量

(C) 向量 $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ 正交於向量 $\begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$

(D) 向量 $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ 正交於向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

15 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，則 $A^n = ?$

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} n & n \\ n & n \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{bmatrix}$

16 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ，試求行列式 $|A|$ 之值。

(A) 22

(B) 24

(C) 26

(D) 28

17 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，試求 A 所有特徵值相加之值。

(A) -1

(B) 1

(C) 2

(D) 4

18 兩連續隨機變數 X 、 Y 之結合機率密度函數 (joint probability density function) 為

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{ 求機率 } P(Y \leq 0.2 | X = 0.4)。$$

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{6}$

(D) $\frac{1}{8}$

19 若 X 為一連續隨機變數 (continuous random variable)，其機率密度函數 (probability density function) 為

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{6}{5}x(1+x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \text{ 試求 } p(x \leq \frac{1}{2})。$$

(A) $\frac{1}{5}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{3}{7}$

(D) $\frac{1}{2}$

20 假設兩個隨機變數 (X, Y) 均勻分布在單位圓的內部，其聯合機率密度函數 (joint probability density function) 為

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/\pi, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \text{ 試算出隨機變數 } X \text{ 的期望值 (mean) 為何？}$$

(A) 0

(B) 0.5

(C) 1

(D) $1/\pi$