

113年公務人員高等考試三級考試試題

類 科：天文

科 目：應用數學（包括微積分、微分方程與向量分析）

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目得以本國文字或英文作答。

一、令 $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ ，回答以下兩小題：

(一)求 P 使得 $P^{-1}AP = D$ ，其中 D 為一對角矩陣 (diagonal matrix)。(10 分)

(二)求 $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ 的一般解 (general solutions)，並證明此一般解 $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ 滿足 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ 。(15 分)

二、求從 $t=1$ 追蹤到 $t=2$ 的螺旋 (helix) $r(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (\cos t, \sin t, 3t)$ 之弧長。(15 分)

三、令函數 $f(x, y, z) = xy^2z^3$ ， $g(x, y, z) = x^2 + 2y^4 + 3z^6$ ，求在 $g(x, y, z) = 3$ 的條件下， $f(x, y, z)$ 的最大值，並分別找出此時相對應的所有點 (x, y, z) 。(20 分)

四、令函數 $f(x, y, z) = 3xy - 2yz$ ，單位向量 $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ，向量場 $\vec{V}(x, y, z) = (2z, 3y, x - z)$ ，分別求以下四個量：(每項各 5 分，共 20 分)

(一) $\text{grad } f = \nabla f(x, y, z)$ ，方向導數 $\nabla_{\vec{u}} f(1, 0, 1)$ 。

(二) $\text{curl}(\vec{V})$ ， $\text{div}(\text{curl}(\vec{V}))$ 。

五、利用函數 $u(x, t)$ 對 x 的傅立葉轉換 (Fourier transform)

$$\hat{u}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} u(x, t) dx, \text{ 證明 } u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy$$

是下述熱傳導方程的解：
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t), -\infty < x < \infty, \\ v(x, 0) = f(x), -\infty < x < \infty, \end{cases}$$

其中函數 $f(x)$ 滿足 $\int_{-\infty}^{\infty} (f(x))^2 dx < \infty$ 。(20 分)