

考試別：鐵路人員考試、國家安全情報人員考試

等別：高員三級考試、三等考試

類科組別：電力工程、電子工程、電子組（選試英文）

科目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、請利用拉普拉斯轉換（Laplace transform）求解下列微分方程式，其中

$$y'' = \frac{d^2 y(t)}{dt^2}。$$

$$y'' + y = \sin 2t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1。 (15 分)$$

二、設 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}。$

(一)求 A 的所有特徵值（eigenvalues）與特徵向量（eigenvectors）。(5 分)

(二)求 $A^5 - 2A^4 - A^3 + 2A^2 + 3A + 2I$ ，其中 I 是 2×2 單位矩陣（identity matrix）。(5 分)

(三)求 A^n ，其中 n 是任意正整數。(5 分)

三、請利用留數（residue）計算 $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4\sin\theta}。$ (10 分)

四、設 X 是高斯隨機變數（Gaussian random variable），且期望值（expected value） $E(X)$ 為 0，變異數（variance） $\text{VAR}(X)$ 為 1，並具有下列機率密度函數（probability density function）

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty$$

(一)設 $Y = 3X + 2$ 。求 Y 的期望值與機率密度函數。(5 分)

(二)設 $Z = X^2$ 。求 Z 的期望值與機率密度函數。(5 分)

乙、測驗題部分：(50 分)

代號：7704 6356

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ，其反矩陣 (Inverse matrix) 為 $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，下列何者正確？

- (A) $a = -0.1$ (B) $b = 0.1$ (C) $c = 0.2$ (D) $d = 0.3$

2 矩陣 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 8 & -1 \end{bmatrix}$ 而矩陣 $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ，則此二矩陣的乘積 AB 之行列式值

(Determinant) 為何？

- (A) $\det(AB) = 24$ (B) $\det(AB) = -24$ (C) $\det(AB) = 12$ (D) $\det(AB) = -12$

3 下列那一個矩陣具有反矩陣 (Inverse matrix) ？

- (A) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

4 向量 $a = [1, 2, 3]$ ，向量 $b = [-4, -5, -6]$ ，設兩向量之夾角為 θ ，則 $\cos \theta = ?$

- (A) $\frac{16\sqrt{22}}{77}$ (B) $-\frac{16\sqrt{22}}{77}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

5 T 是 R^2 到 R^2 的線性轉換， $T\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ， $T\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ ， $T\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ 下列何者正確？

- (A) $a = 5$ (B) $b = 4$ (C) $c = 3$ (D) $d = 2$

6 矩陣 $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ，則 A^2 的特徵值 (eigenvalues)，不可能是下列那一個？

- (A) 9 (B) 1 (C) 16 (D) 4

7 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的 3 個特徵向量 (eigenvectors) 為 $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 與 $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，則下列敘述何者錯誤？

- (A) $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 是 $A^3 + 6A^2$ 的一個特徵向量 (B) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 是 $A^5 - 3A^4 + 2A^2$ 的一個特徵向量
(C) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是 $A^2 - 2A$ 的一個特徵向量 (D) $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是 $A^5 + 4A^3 - A$ 的一個特徵向量

- 8 下列何者不是「可對角化的 (Diagonalizable)」矩陣？
- (A) $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$
- 9 給定 $Z = X + iY = (1-i)^{20} = re^{i\theta}$ ，則下列敘述何者錯誤？
- (A) $Z = -2^{10}$ (B) $r = 2^{10}$ (C) $\theta = 0$ (D) $Y = 0$
- 10 下列的複數函數中，何者是解析函數 (Analytic function)？
- (A) $f(x, y) = x^2 - iy^2$ (B) $f(x, y) = x - iy$
(C) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y + i(2xy - 2x)$ (D) $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2y + i(2xy + 2x)$
- 11 令 $C: |z| = 3$ 為以原點為圓心而半徑為 3 的圓周，則逆時鐘繞著 C 轉一圈所計算出來的複數積分 $\oint_C \frac{e^{iz}}{z^3} dz$ 之值為何？
- (A) $-\pi i$ (B) $2\pi i$ (C) $-2\pi i$ (D) 0
- 12 複數無窮級數 $f(z) = \left(\cdots + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} \right) + \left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} + \frac{z^3}{27} + \frac{z^4}{81} \cdots \right)$ 的收斂區域 (Region of convergence) 為何？
- (A) $1 < |z| < 3$ (B) $\frac{1}{3} < |z| < 1$ (C) $|z| > 1$ 或 $|z| < \frac{1}{3}$ (D) $|z| > 3$ 或 $|z| < 1$
- 13 二階常微分方程式 $y'' + 4y' + 3y = 0$ ， $y(0) = 3$ ， $y'(0) = -5$ 的解為何？
- (A) $y = 7e^x - 4e^{3x}$ (B) $y = 2e^{-x} + 3e^{-3x}$ (C) $y = 2e^x + 3e^{-3x}$ (D) $y = 2e^{-x} + e^{-3x}$
- 14 二階常微分方程式 $(x-2)^2 y'' - 5(x-2)y' + 8y = 0$ 的解之型式為何？
- (A) $y = c_1(x-2)^3 + c_2(x-2)^5$ (B) $y = c_1(x-2)^2 + c_2(x-2)^6$
(C) $y = c_1(x-2)^3 + c_2(x-2)^4$ (D) $y = c_1(x-2)^2 + c_2(x-2)^4$
- 15 利用拉普拉斯轉換 (Laplace transform) 解下列二階微分方程式 $y'' + 5y' + 6y = 2\delta(t-1)$ ， $y(0) = 0$ ， $y'(0) = 0$ ，其中 $\delta(t)$ 為脈衝函數 (unit impulse)，對於 $t > 1$ ，下列何者正確？
- (A) $y = 2e^{-2(t-1)} + 2e^{-3(t-1)}$ (B) $y = 2e^{-2(t-1)} - 2e^{-3(t-1)}$
(C) $y = 2e^{2(t-1)} + 2e^{-3(t-1)}$ (D) $y = 2e^{-2(t-1)} - 2e^{3(t-1)}$
- 16 函數 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$ 且 $f(x+2\pi) = f(x)$ ，傅立葉級數 (Fourier series) 展開成 $\frac{4}{3\pi}(a \sin x + b \sin 2x + c \sin 3x + d \sin 4x + \cdots)$ ，則 $a + b + c + d = ?$
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

17 已知函數 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ 的傅立葉轉換 (Fourier transform) 為 $F(\omega) = \frac{2\sin(\omega)}{\omega}$ ，則函數

$g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$ 的傅立葉轉換 $G(\omega)$ 應該為何者？

- (A) $G(\omega) = \frac{\sin(\omega)}{2\omega}$ (B) $G(\omega) = \frac{\sin(2\omega)}{2\omega}$ (C) $G(\omega) = \frac{\sin(2\omega)}{\omega}$ (D) $G(\omega) = \frac{2\sin(2\omega)}{\omega}$

18 某一種 Covid-19 的檢測方式，可將 90% 的 Covid-19 感染者判為陽性，但是會將 10% 的感染者誤判為陰性 (偽陰性，False negative)。而這種檢測方式又會將 95 % 的 Covid-19 非感染者判為陰性，但有 5% 的非感染者則會被誤判為陽性 (偽陽性，False positive)。假設某地區實際上只有 10% 的 Covid-19 感染者，那麼隨機選擇該地區一個居民，以此種檢測方式做檢驗，結果此居民為陽性反應，請問這位居民真正感染 Covid-19 的機率是多少？

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{7}{9}$ (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{5}{7}$

19 機率質量函數 $P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x=0 \\ \frac{1}{2}, & x=1 \\ \frac{1}{4}, & x=2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，若 X 期望值為 a 和變異數為 b ，則下列何者正確？

- (A) $a = 2$ (B) $b = \frac{1}{2}$ (C) $a = \frac{1}{2}$ (D) $b = 1$

20 已知 X 和 Y 聯合分布機率密度函數 (Joint probability density function) 為 $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，

下列何者錯誤？

(A) 在 $0 \leq x \leq 1$ ， $f_X(x) = 2x$

(B) 在 $0 \leq y \leq 1$ ， $f_Y(y) = 2(1-y)$

(C) 條件機率密度函數 $f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} 1/x, & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(D) 條件機率密度函數 $f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} 1/y, & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$