

類 科：氣象

科 目：微積分

考試時間：1 小時 30 分

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、(一)設 $k \geq 0$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$ 。(10 分)

(二)求級數 $\sum_{n=1}^{\infty} [\tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1} n]$ 之和。(10 分)

二、求下列積分：

(一) $\int_0^9 e^{\sqrt{x}} dx$ (10 分)

(二) $\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$ (10 分)

三、(一) 設 $z = (x^2 + y^2)^{xy}$ ，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 。(10 分)

(二) 設 $f(x) = \int_0^x t e^{-t} dt$ ，求 $f^{(n)}(0)$ 。(15 分)

四、令 C 為拋物面 $z = x^2 + y^2$ 與橢圓面 $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 兩曲面之交線。求此曲線 C 在點 $(-1, 1, 2)$ 的切線參數方程式。(20 分)

五、一個圓形的雨滴落下時，遇到乾燥的大氣而蒸發，蒸發的速率與表面積成正比。求證雨滴的半徑以等速率遞減。(15 分)