

108年公務、關務人員升官等考試、108年交通
事業郵政、公路、港務人員升資考試試題

等 級：薦任

類科(別)：統計

科 目：統計學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、為了避免斷橋事件再次發生，針對各單位在未來進行橋梁的施工和檢測，交通部作了許多檢討，其中針對橋梁鋼索的壽命，交通部制定了一些新規定。已知某鋼索製造商生產之鋼索壽命服從具有平均數 50 年的指數分配。今由該製造商之生產線隨機抽出一組樣本數為二之隨機樣本，分別以 X_1 與 X_2 表示。令隨機變數 $S = \min\{X_1, X_2\}$ 及 $T = \max\{X_1, X_2\}$ 分別代表此組樣本中之最小值及最大值。

(一)求出變數 S 與 T 之聯合累積分配函數 (joint cumulative distribution function)， $F(s, t)$ 。(10 分)

(二)求出變數 S 與 T 之共變異數 $\text{Cov}(S, T)$ 。(10 分)

(三)求出機率 $P(S > 50, T > 100)$ 。(10 分)

二、中美貿易戰開打後，造成各國間匯率跟著波動。某經濟學家長期研究新臺幣兌美元的匯率 (以 X 表示)、兌人民幣的匯率 (以 Y 表示)、兌泰銖的匯率 (以 Z 表示)，發現三者間有密切的關係。經濟學家發現 (X, Y, Z) 具有三元常態分配，且其平均數分別為 $E(X) = 30$ 、 $E(Y) = 4$ 、 $E(Z) = 1$ ，變異數分別為 $V(X) = 1$ ， $V(Y) = 4$ ， $V(Z) = 9$ ，共變異數分別為 $\text{Cov}(X, Y) = -1$ ， $\text{Cov}(X, Z) = 0$ ， $\text{Cov}(Y, Z) = 1$

(一)求出給定 $Y = 8$ 之下， (X, Z) 之條件機率密度函數。(10 分)

(二)令變數 $W = \frac{9(X - 30)^2}{(Z - 1)^2}$ ，求出變數 W 之分配。(10 分)

(三)求出條件期望值的變異數 $V[E(X | Y)]$ 及條件變異數的期望值 $E[V(X | Y)]$ 。(10 分)

(四)令變數 $U = 2X + 3Y - Z$ ， $V = X - 2Y + Z$ ，求出給定 $V = 23$ 之下， U 之條件機率分配。(10 分)

三、除了少子化的危機之外，臺灣多年來一直存在「出生性別比」較正常值略高的疑慮。某社會學學者為了瞭解臺灣是否有重男輕女的狀況，隨機抽樣觀察 n 個新生兒的性別。令變數 B_i 代表第 i 個新生兒為男孩的個數， θ 代表新生兒為男孩的機率，則 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 為一組具有白努利分配 (Bernoulli distribution) 的隨機樣本。

(一) 求出變數 B_i 的變異數 $\text{Var}(B_i)$ 之最小變異不偏估計量 (uniformly minimum variance unbiased estimator)。(10 分)

(二) 求出上述 $\text{Var}(B_i)$ 之不偏估計量的變異數的 Cram'er-Rao 下限 (Cram'er-Rao lower bound)。(10 分)

(三) 求出勝算 (odds) $\frac{\theta}{1-\theta}$ 之最大概似估計量 (maximum likelihood estimator)。(10 分)