

大學入學考試中心
九十六學年度學科能力測驗試題
數學考科

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 5 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 I 題共 9 題

作答方式：• 用 2B 鉛筆在「答案卡」上劃記，修正時應以橡皮擦拭，切勿使用修正液
• 答錯不倒扣

作答說明：在答案卡適當位置選出數值或符號。請仔細閱讀下面的例子。

(一) 填答選擇題時，只用 1, 2, 3, 4, 5 等五個格子，而不需要用到 -, ±, 以及 6, 7, 8, 9, 0 等格子。

例：若第 1 題的選項為(1)3 (2)5 (3)7 (4)9 (5)11，而正確的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列的 $\overset{3}{\square}$ 劃記（注意不是 7），如：

解 答 欄												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±	
1	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

例：若多選題第 10 題的正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡的第 10 列的 $\overset{1}{\square}$ 與 $\overset{3}{\square}$ 劃記，如：

10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
10	☒	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

(二) 選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\overset{8}{\square}$ 劃記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
18	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
19	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\overset{7}{\square}$ 劃記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
20	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
21	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

※試題後附有參考公式及可能用到的對數值與參考數值

第一部分：選擇題（佔 55 分）

壹、單選題（佔 25 分）

說明：第 1 至 5 題，每題選出最適當的一個選項，劃記在答案卡之「解答欄」，每題答對得 5 分，答錯不倒扣。

1. 設 $f(x) = ax^6 - bx^4 + 3x - \sqrt{2}$ ，其中 a, b 為非零實數，則 $f(5) - f(-5)$ 之值為
(1) -30 (2) 0 (3) $2\sqrt{2}$ (4) 30 (5) 無法確定(與 a, b 有關)

2. 試問共有多少個正整數 n 使得坐標平面上通過點 $A(-n, 0)$ 與點 $B(0, 2)$ 的直線亦通過點 $P(7, k)$ ，其中 k 為某一正整數？
(1) 2 個
(2) 4 個
(3) 6 個
(4) 8 個
(5) 無窮多個

3. 設某沙漠地區某一段時間的溫度函數為 $f(t) = -t^2 + 10t + 11$ ，其中 $1 \leq t \leq 10$ ，則這段時間內該地區的最大溫差為
(1) 9 (2) 16 (3) 20 (4) 25 (5) 36

4. 坐標平面上方程式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的圖形與 $\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的圖形共有幾個交點？
(1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 0 個

5. 關於坐標平面上函數 $y = \sin x$ 的圖形和 $y = \frac{x}{10\pi}$ 的圖形之交點個數，下列哪一個選項是正確的？
- (1) 交點的個數是無窮多
 - (2) 交點的個數是奇數且大於 20
 - (3) 交點的個數是奇數且小於 20
 - (4) 交點的個數是偶數且大於或等於 20
 - (5) 交點的個數是偶數且小於 20

貳、多選題（佔 30 分）

說明：第 6 至 11 題，每題的五個選項各自獨立，其中至少有一個選項是正確的，選出正確選項劃記在答案卡之「解答欄」。每題皆不倒扣，五個選項全部答對者得 5 分，只錯一個選項可得 2.5 分，錯兩個或兩個以上選項不給分。

6. 若 $\Gamma = \{z \mid z \text{ 為複數且 } |z-1|=1\}$ ，則下列哪些點會落在圖形 $\Omega = \{w \mid w = iz, z \in \Gamma\}$ 上？
- (1) $2i$ (2) $-2i$ (3) $1+i$ (4) $1-i$ (5) $-1+i$

7. 坐標平面上有相異兩點 P 、 Q ，其中 P 點坐標為 (s, t) 。已知線段 $\overline{PQ}$ 的中垂線 L 的方程式為 $3x - 4y = 0$ ，試問下列哪些選項是正確的？
- (1) 向量 $\overrightarrow{PQ}$ 與向量 $(3, -4)$ 平行
 - (2) 線段 $\overline{PQ}$ 的長度等於 $\frac{|6s-8t|}{5}$
 - (3) Q 點坐標為 (t, s)
 - (4) 過 Q 點與直線 L 平行之直線必過點 $(-s, -t)$
 - (5) 以 O 表示原點，則向量 $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ 與向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的內積必為 0

8. 下列哪些選項中的矩陣經過一系列的列運算後可以化成 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. 坐標空間中，在 xy 平面上置有三個半徑為 1 的球兩兩相切，設其球心分別為 A, B, C 。今將第四個半徑為 1 的球置於這三個球的上方，且與這三個球都相切，並保持穩定。設第四個球的球心為 P ，試問下列哪些選項是正確的？

- (1) 點 A, B, C 所在的平面和 xy 平面平行
- (2) 三角形 ABC 是一個正三角形
- (3) 三角形 PAB 有一邊長為 $\sqrt{2}$
- (4) 點 P 到直線 AB 的距離為 $\sqrt{3}$
- (5) 點 P 到 xy 平面的距離為 $1 + \sqrt{3}$

10. 設 a 為大於 1 的實數，考慮函數 $f(x) = a^x$ 與 $g(x) = \log_a x$ ，試問下列哪些選項是正確的？

- (1) 若 $f(3) = 6$ ，則 $g(36) = 6$
- (2) $\frac{f(238)}{f(219)} = \frac{f(38)}{f(19)}$
- (3) $g(238) - g(219) = g(38) - g(19)$
- (4) 若 P, Q 為 $y = g(x)$ 的圖形上兩相異點，則直線 PQ 之斜率必為正數
- (5) 若直線 $y = 5x$ 與 $y = f(x)$ 的圖形有兩個交點，則直線 $y = \frac{1}{5}x$ 與 $y = g(x)$ 的圖形也有兩個交點

11. 設 $f(x)$ 為一實係數三次多項式且其最高次項係數為 1，已知 $f(1)=1, f(2)=2, f(5)=5$ ，則 $f(x)=0$ 在下列哪些區間必定有實根？
(1) $(-\infty, 0)$ (2) $(0, 1)$ (3) $(1, 2)$ (4) $(2, 5)$ (5) $(5, \infty)$

第二部分：選填題（佔 45 分）

說明：1. 第 A 至 I 題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (12-41)。
2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 設實數 x 滿足 $0 < x < 1$ ，且 $\log_x 4 - \log_2 x = 1$ ，則 $x = \frac{\textcircled{12}}{\textcircled{13}}$ 。(化成最簡分數)

- B. 在坐標平面上的 $\triangle ABC$ 中， P 為 $\overline{BC}$ 邊之中點， Q 在 $\overline{AC}$ 邊上且 $\overline{AQ} = 2\overline{QC}$ 。已知 $\overrightarrow{PA} = (4, 3)$ ， $\overrightarrow{PQ} = (1, 5)$ ，則 $\overrightarrow{BC} = (\textcircled{14}\textcircled{15}, \textcircled{16}\textcircled{17})$ 。

- C. 在某項才藝競賽中，為了避免評審個人主觀影響參賽者成績太大，主辦單位規定：先將 15 位評審給同一位參賽者的成績求得算術平均數，再將與平均數相差超過 15 分的評審成績剔除後重新計算平均值做為此參賽者的比賽成績。現在有一位參賽者所獲 15 位評審的平均成績為 76 分，其中有三位評審給的成績 92、45、55 應剔除，則這個參賽者的比賽成績為 $\textcircled{18}\textcircled{19}$ 分。

D. 某巨蛋球場 E 區共有 25 排座位，此區每一排都比其前一排多 2 個座位。小明坐在正中間那一排(即第 13 排)，發現此排共有 64 個座位，則此球場 E 區共有 20 21 22 23 個座位。

E. 設 P, A, B 為坐標平面上以原點為圓心的單位圓上三點，其中 P 點坐標為 $(1, 0)$ ， A 點坐標為 $(\frac{-12}{13}, \frac{5}{13})$ ，且 $\angle APB$ 為直角，則 B 點坐標為 $(\frac{\textcircled{24}\textcircled{25}}{\textcircled{26}\textcircled{27}}, \frac{\textcircled{28}\textcircled{29}}{\textcircled{30}\textcircled{31}})$ 。(化成最簡分數)

F. 某公司生產多種款式的「阿民」公仔，各種款式只是球帽、球衣或球鞋顏色不同。其中球帽共有黑、灰、紅、藍四種顏色，球衣有白、綠、藍三種顏色，而球鞋有黑、白、灰三種顏色。公司決定紅色的球帽不搭配灰色的鞋子，而白色的球衣則必須搭配藍色的帽子，至於其他顏色間的搭配就沒有限制。在這些配色的要求之下，最多可有 32 33 種不同款式的「阿民」公仔。

- G. 摸彩箱裝有若干編號為 $1, 2, \dots, 10$ 的彩球，其中各種編號的彩球數目可能不同。今從中隨機摸取一球，依據所取球的號數給予若干報酬。現有甲、乙兩案：甲案為當摸得彩球的號數為 k 時，其所獲報酬同為 k ；乙案為當摸得彩球的號數為 k 時，其所獲報酬為 $11 - k$ ($k = 1, 2, \dots, 10$)。已知依甲案每摸取一球的期望值為 $\frac{67}{14}$ ，則依乙案每摸取一球的期望值為 $\frac{\textcircled{34} \textcircled{35}}{\textcircled{36} \textcircled{37}}$ 。(化成最簡分數)

- H. 坐標平面上有一以點 $V(0, 3)$ 為頂點、 $F(0, 6)$ 為焦點的拋物線。設 $P(a, b)$ 為此拋物線上一點， $Q(a, 0)$ 為 P 在 x 軸上的投影，滿足 $\angle FPQ = 60^\circ$ ，則 $b = \underline{\textcircled{38} \textcircled{39}}$ 。

- I. 在 $\triangle ABC$ 中， M 為 $\overline{BC}$ 邊之中點，若 $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{AC} = 5$ ，且 $\angle BAC = 120^\circ$ ，則 $\tan \angle BAM = \underline{\textcircled{40} \sqrt{\textcircled{41}}}$ 。(化成最簡根式)

參考公式及可能用到的數值

- 一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的公式解：
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
- 平面上兩點 $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$ 間的距離為 $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- 通過 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 的直線斜率 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ， $x_2 \neq x_1$ 。
- 等比數列 $\langle ar^{k-1} \rangle$ 的前 n 項之和 $S_n = \frac{a \cdot (1 - r^n)}{1 - r}$ ， $r \neq 1$ 。
- 三角函數的和角公式： $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$
$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2}$$
- $\triangle ABC$ 的正弦定理：
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$
 $\triangle ABC$ 的餘弦定理：
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$
- 棣美弗定理：設 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ，則 $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ ， n 為一正整數
- 算術平均數： $M(=\overline{X}) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
(樣本)標準差：
$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{X})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} ((\sum_{i=1}^n x_i^2) - n\overline{X}^2)}$$
- 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ； $\sqrt{3} \approx 1.732$ ； $\sqrt{5} \approx 2.236$ ； $\sqrt{6} \approx 2.449$ ； $\pi \approx 3.142$
- 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$