

類 科：氣象

科 目：應用數學（包括微積分、微分方程與向量分析）

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、 $\vec{A} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ ， $\vec{B} = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$ 求出：（每小題 5 分，共 25 分）(一) $\vec{A} + \vec{B}$ (二) $\vec{A}$ 在沿著 $\vec{B}$ 所指向方向的投影量

(三)此兩向量構成之三角形的面積

(四)此兩向量的夾角

(五)繪出 $\vec{A} - \vec{B}$ 與 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 在空間中相對的幾何關係二、由(0, 0)到(3, 9)有兩條路徑，路徑 1 是 $y = 3x$ ，路徑 2 是 $y = x^2$ ，現在有兩個向量場：

$$\vec{F}_1 = (3x + y)\vec{i} + (x + 2y)\vec{j} \quad \text{及} \quad \vec{F}_2 = (x + y)\vec{i} + (2x - y)\vec{j}$$

請問：（每小題 5 分，共 25 分）

(一)那一個向量場是保守的？也就是在兩點之間沿任意一條片段平滑 (piecewise smooth) 曲線的線積分其結果不變？請解釋你是如何判斷的？

(二)請將保守的這個向量場分別沿路徑 1 與路徑 2 由(0, 0)積分到(3, 9)，結果為何？是否合乎(一)中不受路徑影響的描述？

(三)求出該保守向量場的位勢函數 (potential function)。

(四)利用此位勢函數計算(二)中的線積分，其結果為何？

(五)利用 Green's theorem 計算由路徑 1 與路徑 2 所圍成區域的面積。

三、將下列函數在 $x = 0$ 處進行泰勒 (Taylor) 級數展開，求出非零的前三項。

(每小題 5 分，共 10 分)

(一) $\ln(1 + 2x)$ (二) $(1 + x)^{1/2}$

四、求出下列積分：（每小題 5 分，共 10 分）

$$(一) \int_1^2 \left(x^3 + \frac{2}{x}\right) dx$$

$$(二) \int_0^{\pi/4} [\cos(x) \sin^2(x) + e^{2x}] dx$$

(請接背面)

類 科：氣象

科 目：應用數學（包括微積分、微分方程與向量分析）

五、求解下列微分方程：（每小題 5 分，共 10 分）

$$(一) \frac{y^3}{x} \frac{dy}{dx} = 1 + x$$

$$(二) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{y^3}{x^3} + \frac{y}{x}$$

六、證明：

$$\iiint (\nabla f \cdot \vec{F}) dV = \iint (f \vec{F} \cdot \vec{n}) ds - \iiint f (\nabla \cdot \vec{F}) dV$$

其中的三維積分是針對一封閉曲面所圍成的體積 V ，二維的積分則是在此曲面上進行的面積分， $\vec{n}$ 為曲面上的法向量。（10 分）

七、求出下列矩陣的反矩陣（inverse matrix），並驗證之（寫出計算過程）。（10 分）

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$