

大學入學考試中心
107 學年度指定科目考試試題
數學甲

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：• 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。

- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\frac{\square}{\square}$ 與第 19 列的 $\frac{\square}{\square}$ 畫記，如：

18	$\frac{1}{\square}$	$\frac{2}{\square}$	$\frac{3}{\blacksquare}$	$\frac{4}{\square}$	$\frac{5}{\square}$	$\frac{6}{\square}$	$\frac{7}{\square}$	$\frac{8}{\square}$	$\frac{9}{\square}$	$\frac{0}{\square}$	$\frac{-}{\square}$	$\frac{\pm}{\square}$
19	$\frac{1}{\square}$	$\frac{2}{\square}$	$\frac{3}{\square}$	$\frac{4}{\square}$	$\frac{5}{\square}$	$\frac{6}{\square}$	$\frac{7}{\square}$	$\frac{8}{\blacksquare}$	$\frac{9}{\square}$	$\frac{0}{\square}$	$\frac{-}{\square}$	$\frac{\pm}{\square}$

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\frac{\square}{\square}$ 與第 21 列的 $\frac{\square}{\square}$ 畫記，如：

20	$\frac{1}{\square}$	$\frac{2}{\square}$	$\frac{3}{\square}$	$\frac{4}{\square}$	$\frac{5}{\square}$	$\frac{6}{\square}$	$\frac{7}{\square}$	$\frac{8}{\square}$	$\frac{9}{\square}$	$\frac{0}{\square}$	$\frac{-}{\blacksquare}$	$\frac{\pm}{\square}$
21	$\frac{1}{\square}$	$\frac{2}{\square}$	$\frac{3}{\square}$	$\frac{4}{\square}$	$\frac{5}{\square}$	$\frac{6}{\square}$	$\frac{7}{\blacksquare}$	$\frac{8}{\square}$	$\frac{9}{\square}$	$\frac{0}{\square}$	$\frac{-}{\square}$	$\frac{\pm}{\square}$

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設 A 為 3×3 矩陣，且對任意實數 a, b, c ， $A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \\ a \end{bmatrix}$ 均成立。試問矩陣 $A^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ 為何？

(1) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. 坐標平面上，考慮 $A(2,3)$ 與 $B(-1,3)$ 兩點，並設 O 為原點。令 E 為滿足

$\overrightarrow{OP} = a \overrightarrow{OA} + b \overrightarrow{OB}$ 的所有點 P 所形成的區域，其中 $-1 \leq a \leq 1$ ， $0 \leq b \leq 4$ 。考慮函數

$f(x) = x^2 + 5$ ，試問當限定 x 為區域 E 中的點 $P(x, y)$ 的橫坐標時， $f(x)$ 的最大值為何？

(1) 5

(2) 9

(3) 30

(4) 41

(5) 54

3. 某零售商店販賣「熊大」與「皮卡丘」兩種玩偶，其進貨來源有 A, B, C 三家廠商。已知此零售商店從每家廠商進貨的玩偶總數相同，且三家廠商製作的每一種玩偶外觀也一樣，而從 A, B, C 這三家廠商進貨的玩偶中，「皮卡丘」所占的比例分別為 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{2}{5}$ 、 $\frac{1}{2}$ 。阿德從這家零售商店隨機挑選一隻「皮卡丘」送給小安作為生日禮物，試問此「皮卡丘」出自 C 廠商的機率為何？

- (1) $\frac{1}{3}$
- (2) $\frac{2}{5}$
- (3) $\frac{10}{23}$
- (4) $\frac{10}{19}$
- (5) $\frac{5}{9}$

二、多選題（占 40 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4. 設 $f(x) = -x^2 + 499$ ，且

$$A = \int_0^{10} f(x) dx, \quad B = \sum_{n=0}^9 f(n), \quad C = \sum_{n=1}^{10} f(n), \quad D = \sum_{n=0}^9 \frac{f(n) + f(n+1)}{2}$$

試選出正確的選項。

- (1) A 表示在坐標平面上函數 $y = -x^2 + 499$ 的圖形與直線 $y = 0$ 、 $x = 0$ 、 $x = 10$ 所圍成的有界區域的面積
- (2) $B < C$
- (3) $B < A$
- (4) $C < D$
- (5) $A < D$

5. 坐標平面上，已知直線 L 與函數 $y = \log_2 x$ 的圖形有兩個交點 $P(a, b), Q(c, d)$ ，且 $\overline{PQ}$ 的中點在 x 軸上。試選出正確的選項。

- (1) L 的斜率大於 0
- (2) $bd = -1$
- (3) $ac = 1$
- (4) L 的 y 截距大於 -1
- (5) L 的 x 截距大於 1

6. 坐標空間中，有 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 、 $\vec{d}$ 四個向量，滿足外積 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ ， $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{d}$ ，且 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 的向量長度均為 4。設向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 θ （其中 $0 \leq \theta \leq \pi$ ），試選出正確的選項。

- (1) $\cos \theta = \frac{1}{4}$
- (2) $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 所張出的平行六面體的體積為 16
- (3) $\vec{a}$ 、 $\vec{c}$ 、 $\vec{d}$ 兩兩互相垂直
- (4) $\vec{d}$ 的長度等於 4
- (5) $\vec{b}$ 與 $\vec{d}$ 的夾角等於 θ

7. 設 O 為複數平面上的原點，並令點 A, B 分別代表複數 z_1, z_2 ，且滿足 $|z_1|=2$ ， $|z_2|=3$ ，

$|z_2 - z_1| = \sqrt{5}$ 。若 $\frac{z_2}{z_1} = a + bi$ ，其中 a, b 為實數， $i = \sqrt{-1}$ 。試選出正確的選項。

(1) $\cos \angle AOB = \frac{2}{3}$

(2) $|z_2 + z_1| = \sqrt{23}$

(3) $a > 0$

(4) $b > 0$

(5) 設點 C 代表 $\frac{z_2}{z_1}$ ，則 $\angle BOC$ 可能等於 $\frac{\pi}{2}$

8. 設 $f(x)$ 為一定義在非零實數上的實數值函數。已知極限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \frac{|x|}{x}$ 存在，試選出正確的選項。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{|x|} \right)^2$ 存在

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \frac{x}{|x|}$ 存在

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 1) \frac{x}{|x|}$ 存在

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)^2$ 存在

三、選填題（占 18 分）

說明：1.第 A 至 C 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號 (9–15)。

2.每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 坐標平面上，已知圓 C 通過點 $P(0, -5)$ ，其圓心在 $x=2$ 上。若圓 C 截 x 軸所成之弦

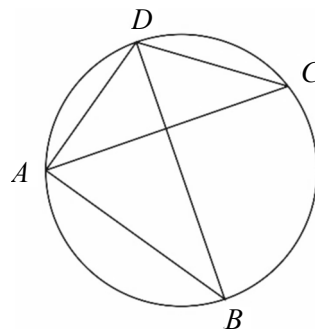
長為 6，則其半徑為 $\sqrt{\textcircled{9}\textcircled{10}}$ 。（化成最簡根式）

B. 假設某棒球隊在任一局發生失誤的機率都等於 p （其中 $0 < p < 1$ ），且各局之間發生失誤與否互相獨立。令隨機變數 X 代表一場比賽 9 局中出現失誤的局數，且令 p_k 代表 9 局中恰有 k 局出現失誤的機率 $P(X=k)$ 。已知 $p_4 + p_5 = \frac{45}{8} p_6$ ，

則該球隊在一場 9 局的比賽中出現失誤局數的期望值為 $\frac{\textcircled{11}\textcircled{12}}{\textcircled{13}}$ 。（化成最

簡分數）

- C. 設 A, B, C, D 為圓上的相異四點。已知圓的半徑為 $\frac{7}{2}$ ， $\overline{AB}=5$ ，兩線段 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 互相垂直，如圖所示（此為示意圖，非依實際比例）。則 $\overline{CD}$ 的長度為 14 $\sqrt{15}$ 。
（化成最簡根式）



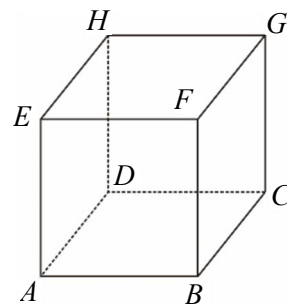
— — — — — 以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷 — — — — —

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。若因字跡潦草、未標示題號、標錯題號等原因，致評閱人員無法清楚辨識，其後果由考生自行承擔。每一子題配分標於題末。

一．坐標空間中有一個正立方體 $ABCDEFGH$ ，如圖所示（此為示意圖），試回答下列問題。

- (1) 試證明 A 點到平面 BDE 的距離是對角線 AG 長度的三分之一。（4 分）
- (2) 試證明向量 $\overrightarrow{AG}$ 與平面 BDE 垂直。（2 分）
- (3) 如果知道平面 BDE 的方程式為 $2x+2y-z=-7$ ，且 A 點坐標為 $(2,2,6)$ ，試求出 A 點到平面 BDE 的距離。（2 分）
- (4) 承(3)，試求出 G 點的坐標。（4 分）



二．考慮三次多項式 $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 3$ 。試回答下列問題。

- (1) 在坐標平面上，試描繪 $y = f(x)$ 的函數圖形，並標示極值所在點之坐標。（4 分）
- (2) 令 $f(x) = 0$ 的實根為 a_1, a_2, a_3 ，其中 $a_1 < a_2 < a_3$ 。試求 a_1, a_2, a_3 分別在哪兩個相鄰整數之間。（2 分）
- (3) 承(2)，試說明 $f(x) = a_1$ 、 $f(x) = a_2$ 、 $f(x) = a_3$ 各有幾個相異實根。（4 分）
- (4) 試求 $f(f(x)) = 0$ 有幾個相異實根（註： $f(f(x)) = -(f(x))^3 - 3(f(x))^2 + 3$ ）。（2 分）