

107 學年度指定科目考試 數學甲考科非選擇題參考答案

數學甲的題型有選擇、選填與非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。各大題的參考答案說明如下：

第一題

第(1)(2)小題

解法一

正確寫出可決定坐標系的頂點坐標。例如設 $A(0,0,0)$, $B(a,0,0)$, $D(0,a,0)$, $E(0,0,a)$, 推得 $G(a,a,a)$, 及平面 BDE 的方程式為 $x+y+z=a$ 。

因 $A(0,0,0)$ 到平面 $x+y+z=a$ 的距離為 $\frac{a}{\sqrt{3}}$, 且 $\overline{AG}$ 為 $\sqrt{3}a$, 故得證第(1)小題。

另外 $\overrightarrow{AG}=(a,a,a)$, 與平面 $BDE: x+y+z=a$ 的法向量 $(1,1,1)$ 平行, 故得證第(2)小題。

解法二

利用向量的方法

由 $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AG} \cdot (\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overline{AD}^2-\overline{AB}^2=0$,

同理 $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE}=0$, 因為 $\overrightarrow{AG}$ 與平面 BDE 的兩向量 $\overrightarrow{BD}$ 、 $\overrightarrow{BE}$ 皆垂直,

所以 $\overrightarrow{AG}$ 與平面 BDE 垂直, 故得證第(2)小題。

令 P 為 A 對平面 BDE 的投影點, 因 $\overrightarrow{AG}$ 與 $\overrightarrow{AP}$ 平行,

且 $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$, 所以 $\overrightarrow{AP}=\alpha(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})$ 。

因 P 在平面 BDE 上, 得 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})$ (因為係數和須為 1)。

所以 $\overline{AP}$ 是 $\overline{AG}$ 的三分之一, 即 A 到平面 BDE 距離是 $\overline{AG}$ 的三分之一。故得證第(1)小題。

解法三

設正方體的邊長為 a 。所以四面體 $ABDE$ 的體積為 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} a^2 \times a = \frac{1}{6} a^3$ 。

設 A 點到平面 BDE 的距離為 h ，而三角形 BDE 為邊長為 $\sqrt{2}a$ 的正三角形，其面積為 $\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$ 。推得四面體 $ABDE$ 的體積為 $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \times h$ ，由 $\frac{1}{6} a^3 = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \times h$ ，可解得高 $h = \frac{1}{\sqrt{3}} a$ ，而對角線長度 $\overline{AG}$ 為 $\sqrt{3}a$ ，故得證第(1)小題。

因正四面體 $GBDE$ 的邊長為 $\sqrt{2}a$ ，其高為 $\sqrt{\frac{2}{3}} \times (\sqrt{2}a)$ ，即 G 點到平面 BDE 的距離為 $\frac{2}{3} \sqrt{3}a$ ，加上 A 點到平面 BDE 的距離為 $\frac{1}{3} \sqrt{3}a$ ，恰等於 A 點到 G 點的距離為 $\sqrt{3}a$ ，故得證第(2)小題。

第(3)小題

由點到平面的公式，可得 A 點到平面 BDE 的距離為 $\frac{|2 \times 2 + 2 \times 2 - 6 + 7|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 3$ 。

第(4)小題

解法一

由(2)可知向量 $\overrightarrow{AG}$ 與平面 BDE 垂直，由(1)(3)可知對角線 $\overline{AG}$ 長度為 $3 \times 3 = 9$ ，

故 $\overrightarrow{AG} = \pm 3(2, 2, -1)$ ，故 G 可能坐標為 $(-4, -4, 9)$ 或 $(8, 8, 3)$ ，但 A, G 兩點位在平面的兩側，所以 G 點坐標為 $(-4, -4, 9)$ 。

解法二

設 Q 點為 $\overline{AG}$ 與平面 BDE 的交點，因為 $\overrightarrow{AG}$ 與平面 BDE 垂直，考慮直線 AQ 的參

$$\text{數式} \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 6 - (-1)t \end{cases}, t \in R$$

代入 BDE 平面方程式 $2x + 2y - z = -7$ 得到 $t = 1$ ，所以 $Q = (0, 0, 7)$ ，

即 $\overrightarrow{AQ} = (-2, -2, 1)$ 。由(1)(2)小題得到 $\overrightarrow{AG} = 3(-2, -2, 1)$ ，

推得 G 點坐標 $= (2, 2, 6) + 3(-2, -2, 1) = (-4, -4, 9)$

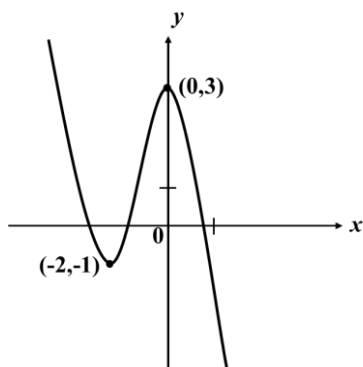
第二題

第(1)小題

由 $f'(x) = -3x^2 - 6x = -3x(x+2)$

知 $f(x)$ 在 $x=-2$ 有極小值 -1 、在 $x=0$ 有極大值 3 。

由首項係數小於 0 ，得以下 $y=f(x)$ 的圖。



第(2)小題

因為 $f(-3)=3$ 、 $f(-2)=-1$ 、 $f(-1)=1$ 、 $f(0)=3$ 、 $f(1)=-1$ ，

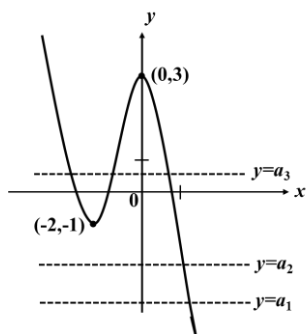
x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$

可知 $f(x)=0$ 分別在區間 $(-3,-2)$ 、 $(-2,-1)$ 、 $(0,1)$ 各有一個實根。

因為 $a_1 < a_2 < a_3$ ，故 $-3 < a_1 < -2$ 、 $-2 < a_2 < -1$ 、 $0 < a_3 < 1$ 。

第(3)小題

由(2)知 $-3 < a_1 < -2$ 、 $-2 < a_2 < -1$ 、 $0 < a_3 < 1$ ，由 a_1, a_2 皆小於極小值 -1 ，可知水平線 $y=a_1$ 或 $y=a_2$ 與 $y=f(x)$ 的圖形皆僅有一交點，又因 a_3 介於極大值 3 與極小值 -1 之間，故 $y=a_3$ 與 $y=f(x)$ 的圖形有三交點；因此 $f(x)=a_1$ ， $f(x)=a_2$ 皆恰有一實根，而 $f(x)=a_3$ 有三相異實根。



第(4)小題

由 $f(x) = -(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$,

知求解 $f(f(x)) = 0$ 等價於求 $-(f(x)-a_1)(f(x)-a_2)(f(x)-a_3) = 0$ 的所有實數解，由(3)知共有 $1+1+3=5$ 個相異實根。