

等 級：薦任

類科(別)：天文

科 目：應用數學（包括微積分、微分方程、向量分析）

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

(四)應考人請務必寫下每一題的演算過程，如果只寫答案，則不給分數。

- 一、觀察某一種鳥之生態，我們一開始觀察時，發現其成熟母鳥的數量為 a_0 且其少年母鳥數量為 j_0 ；於 k 年後，我們察覺其成熟母鳥的數量為 a_k 且其少年母鳥數量為 j_k 。我們將其關係表示成矩陣

$$V_k = \begin{bmatrix} a_k \\ j_k \end{bmatrix}$$

假設每隔一年後(也就是 $k + 1$ 年後)，其原來成熟母鳥仍存活的數量為原來成熟母鳥數量的一半且其少年母鳥變為成熟母鳥的數量為原來少年母鳥的四分之一，同時每隔一年後(也就是 $k + 1$ 年後)，少年母鳥的數量為原來母鳥數量的兩倍。如果我們一開始觀察的時候，成熟母鳥的數量是 100 隻且少年母鳥數量是 40 隻，運用矩陣對角化的特性來做計算：

(一)求 k 年之後成熟母鳥的數量和少年母鳥的數量。(15 分)

(二)比較一下 k 年之後成熟母鳥的數量和少年母鳥的數量之比例關係。(5 分)

- 二、解下列微分方程式。(每小題 10 分，共 20 分)

(一) $\frac{dy}{dx} = \frac{2 + (y - x)e^{3y-3x}}{(y - x)e^{3y-3x}}$

(二) $xy' + 2y + x^3 = x \sin(2x)$

- 三、已知函數 $f(x) = x^2$ 且 $-\pi \leq x \leq \pi$ 。(每小題 10 分，共 20 分)

(一)求函數 f 的傅立葉級數 (Fourier series)。

(二)求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = ?$

- 四、假設 L 是拉普拉斯變換，

(一)求 $L\left(\int_0^t (t - \tau) \sin \tau d\tau\right)$ 。(5 分)

(二)求 $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2 + 4s + 5)}\right)$ 。(15 分)

- 五、已知矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(一)證明矩陣 A 是可對角化。(12 分)

(二)證明矩陣 B 是不可對角化。(8 分)