

財團法人大學入學考試中心基金會

115學年度分科測驗試題

數學甲考科

請於考試開始鈴響起，在答題卷簽名欄位以正楷簽全名

—作答注意事項—

考試時間：80分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正帶（液）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是 $\frac{18-1}{18-2}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答題卷上

的第 18-1 列的 $\frac{3}{8}$ 與第 18-2 列的 $\frac{8}{8}$ 劃記，如：

18-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{0}{8}$	$\frac{-}{8}$	$\frac{\pm}{8}$
18-2	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{0}{8}$	$\frac{-}{8}$	$\frac{\pm}{8}$

例：若答案格式是 $\frac{19-1}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列

的 $\frac{-7}{50}$ 與第 19-2 列的 $\frac{7}{50}$ 劃記，如：

19-1	$\frac{1}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{4}{50}$	$\frac{5}{50}$	$\frac{6}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{8}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{0}{50}$	$\frac{-}{50}$	$\frac{\pm}{50}$
19-2	$\frac{1}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{4}{50}$	$\frac{5}{50}$	$\frac{6}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{8}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{0}{50}$	$\frac{-}{50}$	$\frac{\pm}{50}$

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

第壹部分、選擇（填）題（占 76 分）

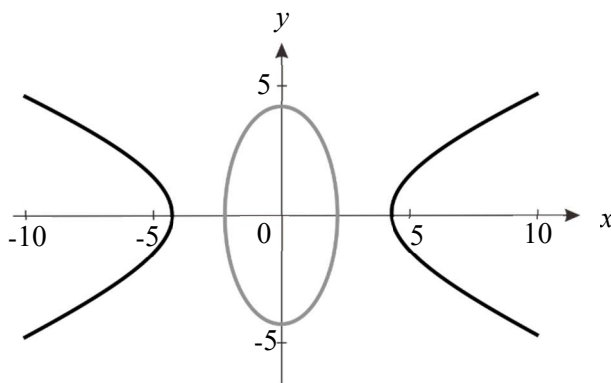
一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題 6 分。

1. 已知圖中「粗灰線」橢圓的方程式為 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，試選出最有可能為圖中「粗黑線」

圖形方程式的選項。

- (1) $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
- (2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
- (3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$
- (4) $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$
- (5) $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1$



2. 已知 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 為首項為 1、公比為 r 的無窮等比數列（其中 r 為非零實數），且知兩無窮等比級數 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ 與 $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1} + \dots$ 皆收斂且其乘積為 1。試選出正確的 r 值。

- (1) $-\frac{1}{2}$
- (2) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$
- (3) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$
- (4) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
- (5) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

3. 對任意實數 x ，試選出函數 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin x - \sqrt{3}\cos x$ 的最大值。

- (1) 1
- (2) $\sqrt{2}$
- (3) $\sqrt{3}$
- (4) $1+\sqrt{2}$
- (5) $1+\sqrt{3}$

二、多選題（占 40 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題 8 分。

4. 箱中有編號分別為 1,2,3 的球各 n_1, n_2, n_3 顆（其中 n_1, n_2, n_3 皆為正整數）。隨機抽取一球（每球被抽中的機率相等），所抽出球的編號為 1,2,3 的機率分別記為 p_1, p_2, p_3 。試選出正確的選項。

- (1) 在已知抽出一球且此球不是 1 號球的條件下，則該球為 2 號球的機率為 $\frac{p_2}{1-p_1}$
- (2) 抽出球編號的期望值等於 $2 + p_3 - p_1$
- (3) 若 n_1, n_2, n_3 為等差數列，則 p_1, p_2, p_3 亦為等差數列
- (4) 若 n_1, n_2, n_3 為等比數列，則 $p_2 \geq \frac{1}{3}$
- (5) 若 $p_k < \frac{1}{2}$ 對 $k=1,2,3$ 都成立，則 n_1, n_2, n_3 可以構成一個三角形的三個邊長

5. 設 a 為實數，關於複數 $z = \frac{a-2i}{1+2i}$ 的性質，試選出正確的選項（其中 $i = \sqrt{-1}$ ， $\bar{z}$ 為 z 的共軛複數）。

- (1) z 的實部為 $\frac{a-4}{5}$
- (2) 若 $\bar{z} = z$ ，則 $a = 1$
- (3) $|z|^2 \geq \frac{4}{5}$
- (4) 若 $a = 0$ ，則 z 的主幅角大於 π
- (5) 無論 a 值為何， z 都不會落在複數平面上的第一象限

6. 對於實係數多項式 $f(x)$ ，將閉區間 $[a, b]$ 分割成三等分段，取每個分段左端點上的 $f(x)$ 函數值所得到的黎曼和記為 $M_a^b(f)$ ，

$$\text{即 } M_a^b(f) = \frac{b-a}{3} \left[f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + f\left(a + \frac{2(b-a)}{3}\right) \right];$$

取每個分段右端點上的 $f(x)$ 函數值所得到的黎曼和記為 $N_a^b(f)$ ，

$$\text{即 } N_a^b(f) = \frac{b-a}{3} \left[f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + f\left(a + \frac{2(b-a)}{3}\right) + f(b) \right].$$

若已知 $f(x)$ 及其一階與二階導函數在三段開區間的正、負，如下表：

區間	(2,3)	(4,5)	(6,7)
$f(x)$	正	負	負
$f'(x)$	負	正	負
$f''(x)$	負	負	正

例如：在開區間 (2,3) 上，滿足 $f(x) > 0$ ， $f'(x) < 0$ 且 $f''(x) < 0$ 。試選出正確的選項。

- (1) 在開區間 (4,5) 上，函數 $y = f(x)$ 遞增且圖形凹口向上
 - (2) 在閉區間 [5,6] 上，函數 $y = f(x)$ 的圖形有反曲點
 - (3) $\int_2^3 f(x) dx < M_2^3(f)$
 - (4) $\int_4^5 f(x) dx > N_4^5(f)$
 - (5) $\int_6^7 f(x) dx > \frac{1}{2}(M_6^7(f) + N_6^7(f))$
7. 考慮函數 $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ，試選出正確的選項。
- (1) 當 $x < 1$ 時， $f(x)$ 都有意義
 - (2) 當 $f(x)$ 與 $f(-x)$ 都有意義時， $f(-x) = -f(x)$ 成立
 - (3) 若 $f(x) > 0$ ，則 $x > 0$
 - (4) 存在實數 a ，滿足 $f(a) = -100$
 - (5) 坐標平面上， $y = f(x)$ 的圖形與 $y = 10^{\frac{1+x}{1-x}}$ 的圖形對直線 $y = x$ 對稱

8. 坐標平面上兩向量 $\vec{u}, \vec{v}$ 滿足 $|\vec{u} + \vec{v}| = 2$ 與 $\vec{u} - \vec{v} = (2, 2)$ 。試選出正確的選項。
- (1) $|\vec{v} + (1, 1)| = 1$
- (2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$
- (3) $|\vec{v}| \leq 2$
- (4) $\vec{u}$ 不可能與 $\vec{v}$ 平行
- (5) 若 $\vec{u}, \vec{v}$ 的夾角為 θ ，則 $|\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta \leq 2\sqrt{2}$

三、選填題（占 18 分）

說明：第 9 題至第 11 題，每題 6 分。

9. 某甲到菜市場買蓮霧、草莓與葡萄共三種水果，每斤的價格依序為 110、190 與 160 元。已知某甲共買了 11 斤半的水果，共花費 1945 元，且草莓比葡萄多買了 2 斤。設蓮霧、草莓與葡萄依序分別買了 x 、 y 與 z 斤，將以上訊息寫成三元一次聯立方程式，

再利用高斯消去法化簡得到增廣矩陣 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{23}{2} \\ 0 & 8 & a & 68 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array} \right]$ ，則 $a = \underline{\textcircled{9-1}}$ ， $b = \underline{\textcircled{9-2}}$ 。

10. 坐標平面上，一圓 C 的圓心在 x 軸上，且圓 C 與兩直線 $L_1: y = \frac{4}{3}x$ 、 $L_2: y = -\frac{3}{4}x$ 皆不相交。設圓 C 上的點到 L_1 之最短距離為 d_1 ，圓 C 上的點到 L_2 之最短距離為 d_2 。

若 d_1 是 d_2 的三倍，則過原點 $(0, 0)$ 且與圓 C 相切的直線，其斜率為 $\frac{\textcircled{10-1} \sqrt{\textcircled{10-2}}}{\textcircled{10-3}}$ 。

（化為最簡根式）

11. 某甲參加一遊戲，其規則如下：

在第一階段連續投擲一公正骰子五次，設隨機變數 X 為出現點數大於 4 點的次數，若 $X \geq 3$ 才可進入第二階段，否則就淘汰。

第二階段仍然連續投擲一公正骰子五次，設隨機變數 Y 為出現偶數點數的次數，若 $Y = X - 1$ 才可獲獎，否則就淘汰。

則在某甲獲獎的條件下， $X = 3$ 的機率為 $\frac{\begin{matrix} \textcircled{11-1} & \textcircled{11-2} \\ \textcircled{11-3} & \textcircled{11-4} & \textcircled{11-5} \end{matrix}}{\quad}$ 。（化為最簡分數）

第貳部分、混合題或非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有 2 題組，選擇（填）題每題 2 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。

選擇（填）題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

12-14 題為題組

設 $p(x), q(x)$ 為實係數多項式，已知 $q(x)$ 為首項係數為 1 的二次式，且滿足 $[q(x)]^2 = x \int_1^x p(t) dt$ 。根據上述，試回答下列問題。

12. 試證明 $q(0) = q(1)$ 。（非選擇題，2 分）

13. 試求 $p(x)$ 。（非選擇題，4 分）

14. 試求多項式函數 $\int_1^x (p(t) - q(t)) dt$ 在閉區間 $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 上的最大值與最小值。

（非選擇題，6 分）

15-17 題為題組

考慮坐標空間中兩平面 $E_1: x+y+2z=2$ 、 $E_2: 2x-y+z=1$ ，並設其交線為 L 。根據上述，試回答下列問題。

15. 點 $(1,0,0)$ 到 E_1 的距離為 $\frac{\sqrt{\textcircled{15-1}}}{\textcircled{15-2}}$ 。（化為最簡根式）（選填題，2 分）

16. 設另一平面 E_3 與 L 平行且包含直線 $\begin{cases} x=3+t \\ y=-2-t \\ z=2+3t \end{cases}$ ， t 為實數，試求平面 E_3 的方程式。

（非選擇題，4 分）

17. 承 16，設另一平面 E 與三平面 E_1, E_2, E_3 皆垂直，且設 E 分別與 E_1 、 E_2 、 E_3 的三條交線在 E 上所圍出的三角形為 Γ 。試證明 Γ 為正三角形並求 Γ 的邊長。

（非選擇題，6 分）

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 r ($r \neq 1$) 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 級數和： $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ； $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

4. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

5. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，

算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ；標準差 $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu_X^2 \right)}$

6. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，

相關係數 $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

最適直線 (迴歸直線) 方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

7. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$

8. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 5 \approx 0.6990, \log 7 \approx 0.8451$

9. 若 $X \sim B(n, p)$ 為二項分布，則期望值 $E(X) = np$ ，變異數 $Var(X) = np(1-p)$ ；

若 $X \sim G(p)$ 為幾何分布，則期望值 $E(X) = \frac{1}{p}$ ，變異數 $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$ 。