

類 科：天文、氣象

科 目：應用數學（包括微積分、微分方程與向量分析）

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目得以本國文字或英文作答。

一、請先將下列二階常微分方程式轉換成一階聯立方程式系統，然後解出其通解（Please find a general solution of the given equation by first converting it to a system）。(20 分)

$$y'' + y' - 12y = 0$$

二、找出下列 Sturm-Liouville 問題的特徵值與特徵函數（Please find eigenvalues and eigenfunctions of the following Sturm-Liouville problem）。(提示：令 $x = e^t$) (20 分)

$$(y'/x)' + (\lambda + 1)y/x^3 = 0, \quad y(1) = 0, \quad y(e^\pi) = 0$$

三、請解出下列矩陣的行列式和反矩陣（Please find the determinant and the inverse of the following matrix）。(20 分)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

四、請解下列邊界值問題（Please solve the following boundary value problem）。(20 分)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x)。$$

其中 c 是常數而 $u_x = \partial u / \partial x$ 。

五、請利用 divergence 定理來計算下列的面積分（Please evaluate the following surface integral by the divergence theorem）。(20 分)

$\iiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA$ ，其中 $\mathbf{F} = [x^2 \ 0 \ z^2]$ 而 S 是由 $|x| \leq 1$ ， $y \leq 3$ 和 $0 \leq |z| \leq 2$ 所組成的區域的表面。