

代號：26320
26520
29220
頁次：4-1

105年公務人員高等考試三級考試試題

類 科：電力工程、電子工程、電信工程、醫學工程

科 目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

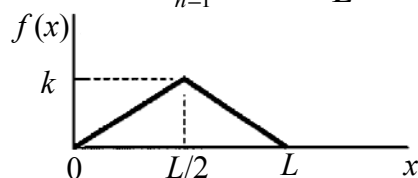
(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、 z 為複數，考慮一已知收斂之冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n+1} (z-1+2i)^{2n}$ ，其中心為 $z_0 = 1-2i$ ，則其收斂半徑為何？（15 分）

二、設矩陣 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，求 $\mathbf{A}^{49}$ 。（15 分）

三、已知一函數為 $f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{L}x & \text{if } 0 < x < \frac{L}{2} \\ \frac{2k}{L}(L-x) & \text{if } \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$ ，如下圖所示。若以半幅展開 $f(x)$ 成

為傅立葉餘弦級數 $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$ 的型式，試求出 a_0 及 a_n 。（10 分）



四、一平行立方體（parallelepiped）是由 $(1, 6, 1)$ 到 $(-2, 4, 2)$ 、 $(3, 0, 0)$ 及 $(2, 2, -4)$ 的三個邊所建構而成，此平行立方體體積為何？（10 分）

乙、測驗題部分：（50 分）

代號：2263

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

- 1 假設 X 為連續型隨機變數，具有機率密度函數（density function） $f_X(x) = e^{-2|x|}$ ，試求 $Y = 0.5 X^2$ 之平均值 $E(Y)$ 為何？

(A) 1/4 (B) 1/3 (C) 1/2 (D) 1

- 2 求 xy 平面上與正 x 軸夾角為 0.3π ，長度為 3 的向量 $\mathbf{F}$ 為何？

(A) $\mathbf{F} = 3\cos(0.3\pi)\mathbf{i} + 3\sin(0.3\pi)\mathbf{j}$ (B) $\mathbf{F} = 3\sin(0.3\pi)\mathbf{i} + 3\cos(0.3\pi)\mathbf{j}$

(C) $\mathbf{F} = 3\cos(0.3\pi)\mathbf{i} - 3\sin(0.3\pi)\mathbf{j}$ (D) $\mathbf{F} = 3\sin(0.3\pi)\mathbf{i} - 3\cos(0.3\pi)\mathbf{j}$

- 3 設 C 為一位在 $y=2$ 平面上以點 $(1, 2, 1)$ 為中心，半徑為 4 的圓。則其曲率（curvature）為何？

(A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 4 (D) $\frac{1}{4}$

- 4 求 $\int_C xy dx - y \sin(x) dy$ 之值，其中 C 為 $x(t) = t^2, y(t) = t, -1 \leq t \leq 4$ ：

(A) $410 - 0.5\sin(16) + 0.5\sin(1)$ (B) $410 - 0.5\cos(16) + 0.5\cos(1)$

(C) $410 + 0.5\sin(16) - 0.5\sin(1)$ (D) $410 + 0.5\cos(16) - 0.5\cos(1)$

- 5 有一矩陣 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 7 & 9 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ ，求該矩陣之反矩陣為何？

(A) $\begin{bmatrix} -\frac{10}{21} & \frac{14}{21} & -\frac{1}{7} \\ \frac{17}{84} & -\frac{1}{3} & \frac{6}{21} \\ \frac{9}{84} & 0 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} \frac{10}{21} & -\frac{14}{21} & \frac{1}{7} \\ -\frac{17}{84} & \frac{1}{3} & -\frac{6}{21} \\ \frac{9}{84} & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} -\frac{11}{21} & -\frac{14}{21} & -\frac{1}{9} \\ \frac{17}{84} & \frac{2}{3} & -\frac{6}{21} \\ -\frac{7}{84} & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} -\frac{13}{21} & \frac{14}{21} & \frac{1}{7} \\ \frac{19}{84} & \frac{1}{3} & -\frac{6}{21} \\ \frac{9}{84} & 0 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$

- 6 以下敘述何者正確？

(A) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

不為一正交（orthogonal）矩陣

(B) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ -9 & 8 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

則 $\text{rank} \mathbf{A} = 4$

(C) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

沒有反矩陣

(D) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

有反矩陣

- 7 設 $\mathbf{A}$ 是一個 2×2 的實方陣，它的特徵值為 $1, -1$ ，則 $\mathbf{A}^{37} = ?$
- (A) 0 (B) $\mathbf{I}$ (C) $-\mathbf{A}$ (D) $\mathbf{A}$
- 8 設 $\mathbf{A}$ 為 3×3 的矩陣，若 $\mathbf{A}$ 的行列式值 $\det(\mathbf{A}) = -2$ ，則 $\det(-3 \mathbf{A})$ 之值為何？
- (A) 6 (B) -18 (C) 54 (D) -54
- 9 求 $z \cos(\frac{1}{z})$ 在 $z = 0$ 之留數 (residue) 之值為何？
- (A) 0.5 (B) -0.5 (C) 2 (D) -2
- 10 令 $f_1(z)$ 為一複數冪級數 (complex power series) 且其收斂半徑 $R_1 \neq 0$ ，已知 $f_2(z)$ 、 $f_3(z)$ 、 $f_4(z)$ 分別為 $f_1(z)$ 經逐項一次微分、二次微分與積分所得之複數冪級數，且其收斂半徑依次為 R_2, R_3, R_4 ，則下列敘述何者正確？
- (A) $R_1 = R_2 = R_3 = R_4$ (B) $R_4 > R_1 > R_2 > R_3$
 (C) $R_4 < R_1 < R_2 < R_3$ (D) R_1, R_2, R_3, R_4 無固定關係
- 11 假設 C 為沿著逆時針方向繞圓周 $|z| = 2$ ，試求積分 $\int_C \frac{1}{e^z} dz$ 為何？
- (A) 0 (B) $-\pi i$ (C) $2\pi i$ (D) 1
- 12 請計算 $\tilde{f}(s) = \frac{1}{s(s^2 + a^2)}$ 的反拉普拉斯轉換，求得 $f(t) = L^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = ?$
- (A) $\frac{1}{a^2}(1 - \cos at)$ (B) $\frac{1}{a}(1 - \cos at)$ (C) $\frac{1}{a^2}(1 - \sin at)$ (D) $\frac{1}{a}(1 - \sin at)$
- 13 試求微分方程式 $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x}$ 之通解，其中 $y' = \frac{dy}{dx}$ ， $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ ：(答案選項中 c_1, c_2 為常數。)
- (A) $y = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$ (B) $y = (c_1 + c_2 \ln x)e^{2x}$ (C) $y = (c_1 + c_2 x + \ln x)e^{2x}$ (D) $y = (c_1 + c_2 x + x \ln x)e^{2x}$
- 14 定義傅立葉轉換為 $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$ ，求出函數 $f(x) = e^{-|x|}$ 的傅立葉轉換：
- (A) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1 - \omega^2}$ (B) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 - \omega^2}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1 + \omega^2}$ (D) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + \omega^2}$

- 15 下列何者為方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 的解？
- (A) $u = f(y + 2x) + g(y + x)$ (B) $u = f(y + 2x) + g(y - x)$
- (C) $u = f(y - 2x) + g(y + x)$ (D) $u = f(y - 2x) + g(y - x)$
- 16 令 $F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 1)}$ ，而 $f(t) = L^{-1}(F(s))$ ，則 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ 之值為何？
- (A) 0 (B) 1 (C) ∞ (D) 不存在
- 17 下列何者為微分方程式 $\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{2}{3} \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{1}{9} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ 之通解？（答案選項中 c_1, c_2, c_3, c_4 為常數。）
- (A) $y = c_1 + c_2 x e^{x/3} + c_3 x^2 e^{x/3} + c_4 x^3 e^{x/3}$ (B) $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{x/3} + c_4 x e^{x/3}$
- (C) $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3$ (D) $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{x/3}$
- 18 考慮一包含 5 個開關元件的系統，其中 2 個開關元件(C_1, C_2)並聯 (parallel connection) 後再與另 3 個開關元件(C_3, C_4, C_5)串聯 (Serial connection)，若該 5 個開關元件(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5)導通的機率分別為 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ ，試求該系統導通之機率為何？
- (A) $\frac{1}{72}$ (B) $\frac{11}{720}$ (C) $\frac{1}{36}$ (D) $\frac{13}{360}$
- 19 自一副 52 張撲克牌中取出 4 張牌，試求取出之牌剛好皆為黑桃或皆為紅心花色 (suit) 之機率為何？
- (A) $\frac{22}{4165}$ (B) $\frac{33}{4165}$ (C) $\frac{44}{4165}$ (D) $\frac{55}{4165}$
- 20 若 $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ 兩向量正交，則以下敘述何者正確？
- (A) $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ 的外積 (Cross Product) 為 0 (B) $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ 的內積 (Inner Product) 為 0
- (C) $\mathbf{F} + \mathbf{G} = 0$ (D) $\|\mathbf{F} + \mathbf{G}\| = 0$