

103年公務人員特種考試司法人員、法務部調查局調查人員、國家安全局國家安全情報人員、海岸巡防人員及移民行政人員考試試題

代號：30930 全一頁

考試別：國家安全情報人員

等別：三等考試

類科組：數理組

科目：數論

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、(一)求同餘方程式 $17x \equiv 9 \pmod{276}$ 的所有整數解。(10 分)

(二)求聯立同餘方程式 $7x + 3y \equiv 10 \pmod{16}$, $2x + 5y \equiv 9 \pmod{16}$ 的所有整數解。(10 分)

二、若將所有的質數依由小而大次序排列，設 p_n 為第 n 個質數。試證明下列敘述：

(一)對任一正整數 n ， $p_{n+1} \leq p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ 。(6 分)

(二)對任一正整數 n ， $p_{n+1} \leq 2^{2^n}$ 。(14 分)

三、設 $\phi(n)$ 為尤拉函數 (Euler's function)。試證明下列敘述：

(一)對任一正整數 n ， $\frac{\sqrt{n}}{2} \leq \phi(n) \leq n$ 。(12 分)

(二)若 $n > 1$ 且 $\phi(n)$ 整除 $n-1$ ，則 n 必然是幾個相異質數的乘積。(8 分)

四、設 p 為一奇質數。

(一)若整數 a 與 p 互質，試證明 $ax \equiv y \pmod{p}$ 恆有一組整數解 (x_0, y_0) 滿足 $0 < |x_0| < \sqrt{p}$ 且 $0 < |y_0| < \sqrt{p}$ 。(10 分)

(二)使用(一)的結果，試證明若 $p \equiv 1 \pmod{4}$ ，則 p 可以寫成兩個平方和。(10 分)

五、(一) $F_n = 2^{2^n} + 1$ ， $n \geq 1$ ，稱為費瑪數。若 F_n 為質數，試證明 3 必為 $\text{mod } F_n$ 的原根 (primitive root modulo F_n)。(10 分)

(二)設 p 為一奇質數，且 $r_1, r_2, \dots, r_{\frac{p-1}{2}}$ 為從 1 到 $p-1$ 之間所有的 $\text{mod } p$ 的二次剩餘 (quadratic residues modulo p)；試證明若 $\prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} r_i \equiv 1 \pmod{p}$ ，則 $p \equiv 3 \pmod{4}$ 。(10 分)