

大學入學考試中心
106 學年度指定科目考試試題
數學甲

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：• 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。

- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\square_3$ 與第 19 列的 $\square_8$ 畫記，如：

18	$\square_1$	$\square_2$	$\blacksquare_3$	$\square_4$	$\square_5$	$\square_6$	$\square_7$	$\square_8$	$\square_9$	$\square_0$	$\square_{-}$	$\square_{+}$
19	$\square_1$	$\square_2$	$\square_3$	$\square_4$	$\square_5$	$\square_6$	$\square_7$	$\blacksquare_8$	$\square_9$	$\square_0$	$\square_{-}$	$\square_{+}$

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\square_{-}$ 與第 21 列的 $\square_7$ 畫記，如：

20	$\square_1$	$\square_2$	$\square_3$	$\square_4$	$\square_5$	$\square_6$	$\square_7$	$\square_8$	$\square_9$	$\square_0$	$\blacksquare_{-}$	$\square_{+}$
21	$\square_1$	$\square_2$	$\square_3$	$\square_4$	$\square_5$	$\square_6$	$\blacksquare_7$	$\square_8$	$\square_9$	$\square_0$	$\square_{-}$	$\square_{+}$

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（占 24 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 從所有二位正整數中隨機選取一個數，設 p 是其十位數字小於個位數字的機率。關於 p 值的範圍，試選出正確的選項。

- (1) $0.22 \leq p < 0.33$
- (2) $0.33 \leq p < 0.44$
- (3) $0.44 \leq p < 0.55$
- (4) $0.55 \leq p < 0.66$
- (5) $0.66 \leq p < 0.77$

2. 設 $a = \sqrt[3]{10}$ 。關於 a^5 的範圍，試選出正確的選項。

- (1) $25 \leq a^5 < 30$
- (2) $30 \leq a^5 < 35$
- (3) $35 \leq a^5 < 40$
- (4) $40 \leq a^5 < 45$
- (5) $45 \leq a^5 < 50$

3. 試問在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 的範圍中， $y = 3 \sin x$ 的函數圖形與 $y = 2 \sin 2x$ 的函數圖形有幾個交點？

- (1) 2 個交點
- (2) 3 個交點
- (3) 4 個交點
- (4) 5 個交點
- (5) 6 個交點

4. 已知一實係數三次多項式 $f(x)$ 在 $x=1$ 有極大值 3，且圖形 $y=f(x)$ 在 $(4, f(4))$ 之切線方程式為 $y - f(4) + 5(x - 4) = 0$ ，試問 $\int_1^4 f''(x) dx$ 之值為下列哪一選項？

- (1) -5
- (2) -3
- (3) 0
- (4) 3
- (5) 5

二、多選題（占 24 分）

說明：第 5 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

5. 設 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 為兩非零向量，夾角為 120° 。若 $\vec{u}$ 與 $\vec{u} + \vec{v}$ 垂直，試選出正確的選項。

- (1) $\vec{u}$ 的長度是 $\vec{v}$ 的長度的 2 倍
- (2) $\vec{v}$ 與 $\vec{u} + \vec{v}$ 的夾角為 30°
- (3) $\vec{u}$ 與 $\vec{u} - \vec{v}$ 的夾角為銳角
- (4) $\vec{v}$ 與 $\vec{u} - \vec{v}$ 的夾角為銳角
- (5) $\vec{u} + \vec{v}$ 的長度大於 $\vec{u} - \vec{v}$ 的長度

6. 已知複數 z 滿足 $z^n + z^{-n} + 2 = 0$ ，其中 n 為正整數。將 z 用極式表示為 $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ，且 $r > 0$ 。試選出正確的選項。

- (1) $r = 1$
- (2) n 不能是偶數
- (3) 對給定的 n ，恰有 $2n$ 個不同的複數 z 滿足題設
- (4) θ 可能是 $\frac{3\pi}{7}$
- (5) θ 可能是 $\frac{4\pi}{7}$

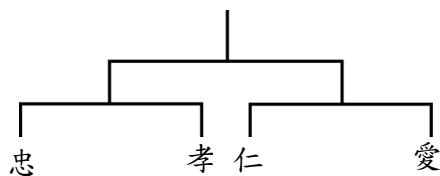
7. 設實係數三次多項式 $f(x)$ 的首項係數為正。已知 $y=f(x)$ 的圖形和直線 $y=g(x)$ 在 $x=1$ 相切，且兩圖形只有一個交點。試選出正確的選項。

- (1) $f(1)=g(1)$
- (2) $f'(1)=g'(1)$
- (3) $f''(1)=0$
- (4) 存在實數 $a \neq 1$ 使得 $f'(a)=g'(a)$
- (5) 存在實數 $a \neq 1$ 使得 $f''(a)=g''(a)$

三、選填題（占 28 分）

說明：1.第 A 至 D 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號 (8–18)。
2.每題完全答對給 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 某高中一年級有忠、孝、仁、愛四班的籃球隊，擬由經抽籤決定的下列賽程進行單淘汰賽（輸一場即被淘汰）：



假設忠班勝過其他任何一班的機率為 $\frac{4}{5}$ ，孝班勝過其他任何一班的機率為 $\frac{1}{5}$ ，仁、愛兩班的實力相當，勝負機率各為 $\frac{1}{2}$ 。若任一場比賽皆須分出勝負，沒有和局。如果冠軍隊可獲得 6000 元獎學金，亞軍隊可獲得 4000 元獎學金，則孝班可獲得獎學金的期望值為 8910 元。

- B. 坐標平面上有三條直線 L 、 L_1 、 L_2 ，其中 L 為水平線， L_1 、 L_2 的斜率分別為 $\frac{3}{4}$ 、 $-\frac{4}{3}$ 。已知 L 被 L_1 、 L_2 所截出的線段長為 30，則 L 、 L_1 、 L_2 所決定的三角形

的面積為 ⑪ ⑫ ⑬。

- C. 坐標平面上， x 坐標與 y 坐標均為整數的點稱為格子點。令 n 為正整數， T_n 為平面上以直線 $y = \frac{-1}{2n}x + 3$ ，以及 x 軸、 y 軸所圍成的三角形區域（包含邊界），

而 a_n 為 T_n 上的格子點數目，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} =$ ⑭ ⑮。

- D. 坐標空間中，平面 $ax + by + cz = 0$ 與平面 $x = 0$ 、 $x + \sqrt{3}y = 0$ 的夾角（介於 0° 到 90°

之間）都是 60° ，且 $a^2 + b^2 + c^2 = 12$ ，則 $(a^2, b^2, c^2) = ($ ⑯ $,$ ⑰ $,$ ⑱ $)$ 。

— — — — — 以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷 — — — — —

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一. 在坐標平面上，考慮二階方陣 $A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 所定義的線性變換。對於平面上異於原點 O 的點 P_1 ，設 P_1 經 A 變換成 P_2 ， P_2 經 A 變換成 P_3 。令 $a = \overline{OP_1}$ 。

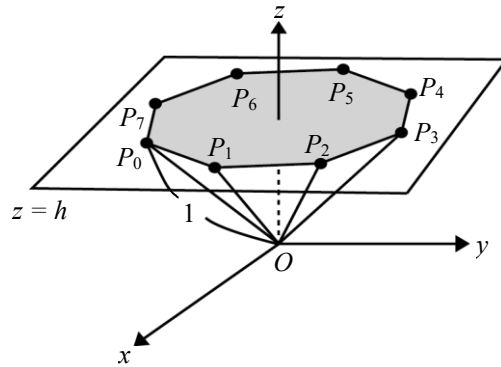
(1) 試求 $\sin(\angle P_1OP_3)$ 。(4 分)

(2) 試以 a 表示 $\Delta P_1P_2P_3$ 的面積。(4 分)

(3) 假設 P_1 是圖形 $y = \frac{1}{10}x^2 - 10$ 上的動點，試求 $\Delta P_1P_2P_3$ 面積的最小可能值。(4 分)

背面尚有試題

二、坐標空間中， $O(0,0,0)$ 為原點。平面 $z=h$ （其中 $0 \leq h \leq 1$ ）上有一以 $(0,0,h)$ 為圓心的圓，在此圓上依逆時鐘順序取 8 點構成正八邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$ ，使得各線段 $\overline{OP_j}$ ($0 \leq j \leq 7$) 的長度都是 1。請參見示意圖。



- (1) 試以 h 表示向量內積 $\overrightarrow{OP_0} \cdot \overrightarrow{OP_4}$ 。(4 分)
- (2) 若 $V(h)$ 為以 O 為頂點、正八邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$ 為底的正八角錐體積，試將 $V(h)$ 表為 h 的函數（註：角錐體積 $= \frac{1}{3}$ 底面積 $\times$ 高）。(2 分)
- (3) 在 $\overrightarrow{OP_0}$ 和 $\overrightarrow{OP_4}$ 夾角不超過 90° 的條件下，試問正八角錐體積 $V(h)$ 的最大值為何？(6 分)