

類 科：氣象

科 目：應用數學（包括微積分、微分方程與向量分析）

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

(四)作答時務必清楚寫下每一題的演算過程，如沒有完整的演算過程，只寫答案，則不給予任何分數。

一、已知矩陣方程組

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases} \quad \text{求其解。}$$

(一)將方程組寫成矩陣形式 $AX = b$ 。(3 分)

(二)求矩陣的特徵值和所對應的特徵向量。(12 分)

(三)求矩陣 A 的反矩陣，並且用此反矩陣求此方程組的解。(5 分)二、求 $\int_1^2 \int_0^{\log x} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}} dy dx$ 。(20 分)

三、解下列微分方程式：

(一) $y'' - 2xy' + 2y = 0, y(0) = -\frac{1}{3}$ 。(12 分)(二) $3(1+x)y' - 2yy' + 3y = 1 - 2x, y(0) = 0$ 。(8 分)

四、使用拉普拉斯轉換 (Laplace Transform) 的方法解微分方程式。(15 分)

$$\begin{cases} y'' + y' = e^{-x} \sin x, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

五、(一)已知三角形 $\triangle DEF$ 的邊是 C ，其邊上的方向性是逆時針方向。其頂點分別為 $D(0,0)$, $E(1,2)$ 和 $F(0,2)$ 。使用格林定理 (Green's Theorem) 計算 $\oint_C 4x^2 y dx + 2y dy$ 。(10 分)(二)已知向量場 $F = (1+x)e^{x+y}\mathbf{i} + (xe^{x+y} - 2z)\mathbf{j} - 2y\mathbf{k}$ 。求向量場 F 的電位能 (Scalar potential)。(要先驗證其守恆性，否則不給分。)(15 分)