

等 別：三等考試
類 科：電力工程、電子工程
科 目：工程數學
考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、若 $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & \cos \theta & \sin \theta \\ c & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ 為正交矩陣，求：

(一) a, b, c 之值為何？（10 分）

(二) A 的特徵值之和為何？（5 分）

二、解微分方程 $ty'' + (t-1)y' + y = 0$ ，其中 $y' = \frac{dy}{dt}$ 及 $y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$ ；求滿足下列條件之解 $y(0) = 0$ 及 $y(1) = 2$ 。（15 分）

三、請求出週期函數 $f(x) = x^2$ ，其中 $-\pi < x < \pi$ ， $f(x+2\pi) = f(x)$ ，之傅立葉級數，再利用此級數求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ 之值。（10 分）

四、自一副正常 52 張撲克牌中取出 5 張牌，試求下列事件之機率：

(一)所有取出之牌皆為同花色 (suit)。（5 分）

(二)取出 2 張或更多之 Aces。（5 分）

乙、測驗題部分：（50 分）

代號：7335

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 下列那一組值會使矩陣 $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & 0 & 3 \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$ 為“歪斜對稱” (skew-symmetric) 矩陣？

(A) $a = 1, b = 2, c = 3$ (B) $a = 1, b = -2, c = -3$ (C) $a = -1, b = -2, c = -3$ (D) $a = -1, b = 2, c = -3$

2 微分方程式 $(2xy^3 - 3y)dx - (3x - 3x^2y^2 + 6y)dy = 0$ 其解為何？（選項中 k 為任意常數）

(A) $x^2y^3 + 3xy + 3x^2 = k$ (B) $x^2y^3 - 3xy + 3y^2 = k$ (C) $x^2y^3 - 3xy - 3y^2 = k$ (D) $x^2y^3 + 3xy - 3x^2 = k$

- 3 求矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & -7 \end{bmatrix}$ 的秩 (rank) 為何？
- (A)1 (B)2 (C)3 (D)0
- 4 令收斂區間為 $0 < |z| < 1$ ，試求複變數函數 $f(z) = \frac{e^z}{z(z^2+1)}$ 以勞倫茲級數 (Laurent series) 表示時，其留數 (residue) 應為下列何值？
- (A)0 (B) $\frac{1}{2}$ (C)1 (D) $\frac{1}{6}$
- 5 令矩陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ，利用 QR 分解可得 $A = QR$ ，其中 Q 為一 3×2 正規正交行矩陣 (orthonormal column matrix)， $R = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ 為一 2×2 上三角矩陣 (upper triangular matrix)，且 a 、 b 、 c 均大於等於零，則下列敘述何者正確？
- (A) $a+b+c = 5$ (B) $abc = 5$ (C) $a-b-c = 4$ (D) $ab+bc+ca = 4$
- 6 已知線性轉換 $T: \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^4$ ，且定義為 $T(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ ， $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & -9 & -7 \end{bmatrix}$ 。下列何者為 $\ker(T)$ 的基底 (basis)？
- (A) $\{(-3, 0, 1, 0), (-1, 2, 0, 1)\}$ (B) $\{(-3, 0, 1, 0), (-4, 2, 1, 1), (0, 1, 3, 1)\}$
(C) $\{(2, 4, 1, 0), (-4, 2, 1, 1), (0, 1, 3, 1)\}$ (D) $\{(2, 4, 1, 0), (0, 1, 3, 1)\}$
- 7 求複變函數積分 $\oint_C \frac{z+1}{z^3-2z^2} dz$ 之值，其中積分路徑 C 為複數平面上逆時鐘方向繞圓周 $|z-1|=2$ ，以及 $i = \sqrt{-1}$ 。
- (A) $\frac{3\pi i}{2}$ (B) $-\frac{3\pi i}{2}$ (C) $3\pi i$ (D)0
- 8 下列何組向量可以是 $\mathbb{R}^3$ 的一個基底？
- (A) $\{[1 \ 2 \ 3], [4 \ 5 \ 6], [7 \ 8 \ 9]\}$ (B) $\{[1 \ 4 \ 5], [2 \ 7 \ 3]\}$
(C) $\{[1 \ 2 \ 3], [4 \ 5 \ 6], [7 \ 8 \ 9], [2 \ 1 \ 1]\}$ (D) $\{[1 \ 2 \ 5], [4 \ 1 \ 6], [2 \ 1 \ 1]\}$

- 9 假設矩陣 A 為 3×3 的方陣，且其特徵值 (eigenvalues) $\lambda_1 = 1$ ， $\lambda_2 = -1$ ， $\lambda_3 = -1$ ，求 $A^{50} = ?$ 選項中 I 為 3×3 單位方陣。

(A) A (B) $-A$ (C) I (D) $-I$

- 10 假設 $z = 3+2i$ ，求 $I_m(\frac{\bar{z}}{z}) = ?$

(A) $\frac{12}{13}$ (B) $-\frac{12}{13}$ (C) $-\frac{11}{13}$ (D) $-\frac{12}{15}$

- 11 求微分方程式 $xy' + y = \sin x$ 的解。(選項中 C 為任意常數)

(A) $y = \frac{(-\cos x + c)}{x}$ (B) $y = \frac{(-\tan x + c)}{x}$ (C) $y = -\cos x + c \sin x$ (D) $y = \frac{(-\cos x + c \sin x)}{x}$

- 12 下列何者是互為線性相依 (linear dependent) ?

(A) $y_1 = \cos wx$, $y_2 = \sin wx$, $y_3 = e^x$ (B) $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = xe^x$
(C) $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{6x}$, $y_3 = e^{9x}$ (D) $y_1 = x$, $y_2 = 3x$, $y_3 = x^2$

- 13 設 $y = a(t)$ 為 $y''(t) + y'(t) + y(t) = 2$ 之解，則 $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t)$ 之值為何？

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) ∞

- 14 以 Frobenius 級數 $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n X^{n+r}$ 求解 $x^2 y'' + x(\frac{1}{2} + 2x)y' + (x - \frac{1}{2})y = 0$ ，則其所得到的指示方程式

(Indicial equation) 為何？

(A) $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$ (B) $r^2 + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$ (C) $r^2 + \frac{1}{2}r - 1 = 0$ (D) $r^2 + 2r - \frac{1}{2} = 0$

- 15 已知 $f(t) = \begin{cases} \cos 2t, & 0 \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi \end{cases}$ 的拉普拉斯 (Laplace) 轉換為 $F(s) = \frac{s(1 - e^{-2\pi s})}{s^2 + 4}$ ，當給定一微分方程

為 $x''(t) + 4x(t) = f(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$ ，下列何者正確？

(A) $x(t) = \frac{1}{2}t \sin 2t$ if $t < 2\pi$ (B) $x(t) = \frac{1}{2} \sin 2t$ if $t \geq 2\pi$
(C) $x(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{8}$ (D) $x(\frac{9}{4}\pi) = \frac{1}{2}\pi$

16 白努利方程式 (Bernoulli equation) $y' + p(x)y + q(x)y^a = 0$ 可以何方式轉換為線性方程式？

(A) 以變數變換 $w = y^{-a}$ 轉換

(B) 以變數變換 $u = y^{1-a}$ 轉換

(C) 以變數變換 $v = y^{a+1}$ 轉換

(D) 要先知道一特解 $S(x)$ 後，以變數變換 $z = S(x) + \frac{1}{y}$ 轉換

17 下列何者為函數 $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ 之傅立葉級數 (Fourier series) ？

(A) $\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n - 1}{n} \cos nx \right)$

(B) $\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n} \cos nx \right)$

(C) $\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n - 1}{n} \sin nx \right)$

(D) $\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n} \sin nx \right)$

18 給定一個連續隨機變數 X ，其累積分布函數 (cumulative distribution function)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ \frac{x^2}{7} & \text{if } 0 \leq x < 1 \\ \frac{2x}{7} - \frac{1}{7} & \text{if } 1 \leq x < 3 \\ \frac{5x}{7} - \frac{x^2}{14} - \frac{11}{14} & \text{if } 3 \leq x < 5 \\ 1.0 & \text{if } 5 \leq x \end{cases}$$

，則機率 $P(X \leq 1 | X \leq 3)$ 之值為何？

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{5}$

(C) $\frac{2}{3}$

(D) $\frac{1}{3}$

19 離散隨機變數 X 與 Y 之結合機率質量函數 (joint probability mass function) 為：

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c \cdot xy^2, & \text{if } x=1,2, y=1,2,3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

，試問下列何者正確？

(A) $E[X] = \frac{4}{3}$

(B) $E[X] = \frac{5}{3}$

(C) $E[X] = \frac{10}{7}$

(D) $E[X] = \frac{12}{7}$

20 投擲一個公正的骰子一次，規定出現點數 1, 2, 3, 4 為成功 ($X=1$)，出現其餘點數則為失敗 ($X=0$)，求隨機變數 X 之變異數 $\text{Var}(X)$ 為何？

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{2}{9}$

(D) $\frac{4}{9}$