

111年公務人員特種考試司法人員、法務部調查局
調查人員、海岸巡防人員、移民行政人員考試及111年
未具擬任職務任用資格者取得法官遴選資格考試試題

考試別：調查人員
等別：三等考試
類科組：電子科學組
科目：工程數學
考試時間：2小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目得以本國文字或英文作答。

一、針對一個三度空間中的向量場 (vector field) $\vec{F}=(x^2, xy, y+z^2)$ ，請執行下列計算：(每小題 5 分，共 20 分)

(一)請求出 $\vec{F}$ 的散度 (divergence)，也就是 $\nabla \cdot \vec{F}$ ，其中 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ (亦可寫為 $\nabla = \hat{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z}$ ，其中的 $\hat{i}$ 、 $\hat{j}$ 、 $\hat{k}$ 分別為坐標軸的 x-軸、y-軸、z-軸方向的單位向量)。

(二)請求出 $\vec{F}$ 的旋度 (curl)，也就是 $\nabla \times \vec{F}$ 。

(三) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = ?$

(四) $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = ?$

二、請考慮一個微分方程式，如下所示：

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + 6\frac{d}{dx}y(x) - 7y(x) = \cos(x)$$

(一)本微分方程式是否可以歸類為二階的線性微分方程式 (second-order linear differential equation)？(5 分)

(二)請寫出此微分方程式之齊次解 (homogeneous solution) 的一般形式 (general form)。(7 分)

(三)請求解此微分方程式之特定解 (particular solution)。(8 分)

三、請考慮一個 2×2 矩陣，如下所示：

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(一)我們以 A^{-1} 來代表 A 的反矩陣 (inverse matrix)，那麼 $A^{-1} = ?$ (5 分)

(二)我們以 $\det(A)$ 來代表 A 的行列式 (determinant)，那麼 $\det(A) = ?$ (5 分)

(三)請證明 A 為不可對角化 (not diagonalizable)。(10 分)

四、有一個連續隨機變數 (continuous random variable) X ，其機率密度函數 (probability density function) 如下所示：(每小題 5 分，共 20 分)

$$f_X(x) = C \cdot e^{-\lambda|x|}, \text{ for } -\infty < x < \infty$$

其中 λ 為大於 0 的給定常數， C 則為待定常數。

(一) $C = ?$

(二) 請求出 X 的期望值 (expectation)。

(三) 我們以 $\text{Prob}(\cdot)$ 來代表機率值，那麼 $\text{Prob}(X > X^2) = ?$

(四) 我們定義一個隨機變數 $Y = |X|$ ；請求出 Y 的機率密度函數。

五、我們考慮一個複變函數 $f(z) = \cos(z)/z^5$ ，已知其羅倫特展開式 (Laurent expansion) 為：(每小題 5 分，共 20 分)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot z^{2n-5} = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z^3} + \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{z} - \frac{1}{720} \cdot z + \frac{1}{40320} \cdot z^3 - \dots$$

(一) 當我們試圖將 $f(z)$ 以題中所示之羅倫特展開式展開時，其實有某一些 (或是某一個) 複數平面上的點必須加以排除，請問是那一些？

(二) 我們將 $f(i)$ 寫成 $f(i) = \alpha + i \cdot \beta$ ($i = \sqrt{-1}$)，那麼 $\alpha = ?$ $\beta = ?$

(三) 如果我們用 C 來表示在複數平面上的單位圓 (也就是 $x^2 + y^2 = 1$) 上面以逆時針方向從 $z = 1$ 開始繞一圈走回原出發點，那麼 $\int_C f(z) dz = ?$

(四) 如果我們用 K 來表示在複數平面上以 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 所描述的圓上面以逆時針方向從 $z = 1$ 開始繞一圈走回原出發點，那麼 $\int_K f(z) dz = ?$