

代號：33570
頁次：4-1

106年特種考試地方政府公務人員考試試題

等 別：三等考試

類 科：電力工程

科 目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、三維空間中的四點 O 、 A 、 B 、 C 的座標分別為 $(2, 0, 2)$ 、 $(-3, 1, 0)$ 、 $(1, 1, 4)$ 、 $(5, 2, -4)$ ，
求解：

(一)以 O 、 A 、 B 三點為頂點所構成的三角形面積。（5 分）

(二)以 O 、 A 、 B 、 C 四點為頂點所構成的四面體體積。（5 分）

二、試求 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{(x+2)(x-10)(x^2+1)} dx$ 之值。（15 分）

三、求解偏微分方程式 $x^2 u_{xy} - 2y^2 u = 0$ ，其中 $u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ 。（10 分）

四、連續隨機變數 X 與 Y 之聯合機率密度函數（joint probability density function）為

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2xe^{-y}, & \text{if } 0 < x < 1, y > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \text{ 試求：}$$

(一) X 之邊際機率密度函數（marginal probability density function） $f_X(x)$ 與 Y 之邊際
機率密度函數 $f_Y(y)$ 。（7 分）

(二) XY 的期望值 $E[XY]$ 。（8 分）

乙、測驗題部分：（50 分）

代號：7335

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆 在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 若 A 為一個 6×6 反對稱矩陣 ($A = -A^T$)，下列何者錯誤？

(A) $\det(A) = \det(A^T)$

(B) $\det(A) = \det(-A)$

(C) $\det(A) = -\det(A)$

(D) $\det(A) = \det(-A^T)$

2 求 $\|u \times v\|^2 + (u \cdot v)^2$ 與下列何者相等？

- (A) $(u \cdot u)(v \times v)$ (B) $(u \times v)(u \cdot v)$ (C) $(u \cdot u)(v \cdot v)$ (D) $(u \times u) \cdot (v \times v)$

3 試決定 a 值，可能造成下列的聯立方程式會有無限多組解：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_3 = 2 \\ (a^2 - 4)x_3 = a - 2 \end{cases}$$

- (A) $a = -1$ (B) $a = -1.5$ (C) $a = -2$ (D) $a = -2.5$

4 令矩陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ ，其反矩陣 (inverse matrix) A^{-1} 可表示為 $[a_{ij}]$ ，則下列敘述何者正確？

- (A) $a_{12} = -3$ (B) $a_{21} = -2$ (C) $a_{23} = -7$ (D) $a_{32} = 2$

5 已知 $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 6 \end{bmatrix}$ ， $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ ，求 $f(A)$ 為何？

- (A) $\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -20 & 11 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 7 & -20 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 11 & -7 \\ -20 & 4 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 20 & 7 \\ -4 & -11 \end{bmatrix}$

6 給定一 3×3 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ，則下列何者錯誤？

- (A) 矩陣 A 的特徵值 (eigenvalues) 為 1, 2, 2
(B) $[0 \ 1 \ 0]^T$ 為矩陣 A 的一個特徵向量 (eigenvector)
(C) $[-1 \ 0 \ 1]^T$ 為矩陣 A 的一個特徵向量 (eigenvector)
(D) $[2 \ 1 \ 1]^T$ 為矩陣 A 的一個特徵向量 (eigenvector)

7 假設複數 $z = x + iy$ ，則下列那一個複變數函數是屬於全域可分析的 (analytic for all z)？

- (A) $xy + iy$ (B) $e^y e^{ix}$ (C) $e^{-y} \sin x - i e^{-y} \cos x$ (D) $2xy + i(x^2 - y^2)$

8 求 $\oint_C e^z dz$ 之值，其中 C 為 $|z| = 3$ 之逆時針之圓周：

- (A) π (B) 0 (C) $-\pi$ (D) -1

- 9 已知複變數函數 $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$ 的奇異點 (singular point) 是為一個極點 (pole)，試決定此極點的階數 (order)

M 及對應的留數 (residue) B 分別為何？

- (A) $M = 3$, $B = \frac{e}{2}$ (B) $M = 2$, $B = \frac{-e}{2}$ (C) $M = 2$, $B = 2e^2$ (D) $M = 1$, $B = e^2$

- 10 求下列微分方程的特解：

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \text{ 且 } y(0) = 3, y'(0) = 4$$

- (A) $y = (3 + 2x)e^{2x}$ (B) $y = (2 + 3x)e^{2x}$
(C) $y = (3 - 2x)e^{\frac{3}{2}x}$ (D) $y = (3 - 2x)e^{2x}$

- 11 求微分方程 $y' - \frac{4xy}{y-1} = 0$, $y(0) = 1$ 之解為：

- (A) $2x - y - \ln|y| = -1$ (B) $x^2 - y + \ln|y| = -1$
(C) $2x^2 - y + \ln|y| = -1$ (D) $x^2 - y = -1$

- 12 已知 $y(t)$ 的拉普拉斯轉換 (Laplace transform) 方程式為 $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{s+14}{s^4 + 3s^3 + 7s^2}$ 。下列何者錯誤？

(A) $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$

(B) $y(0^+) = 7$

(C) $\mathcal{L}\left\{\int_0^t y(\alpha) d\alpha\right\} = \frac{s+14}{s^5 + 3s^4 + 7s^3}$

(D) $\mathcal{L}\{y(t-2)u(t-2)\} = e^{-2s} \frac{s+14}{s^4 + 3s^3 + 7s^2}$, 其中 $u(t)$ 為單位步階函數 (unit step function)

- 13 下列何者為 $xy(y')^2 + (x^2 + xy + y^2)y' + x(x+y) = 0$ 之解？(其中 C 為常數)。

- (A) $x^2 + y^2 + C = 0$ (B) $x^2 + y^2 + Cx = 0$ (C) $x^2 + y^2 + Cy = 0$ (D) $x^2 + y^2 + Cxy = 0$

- 14 給定一偏微分方程式 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^2 y$, 且方程式滿足 $z(x, 0) = x^2$, $z(1, y) = \cos y$, 試問 $z(0, \Pi) = ?$

- (A) $\frac{12 - \Pi^2}{6}$ (B) $-\frac{12 + \Pi^2}{6}$ (C) $\frac{12 + \Pi^2}{6}$ (D) $\frac{-12 + \Pi^2}{6}$

- 15 有一微分方程 $(x^2 + 16)y'' + \frac{1}{3}x^2y' + 5e^x y = 0$ ， r_1 及 r_2 分別為其級數解 $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 及 $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-3)^n$ 的收斂

半徑，其中 c_n 為常數，則 $r_1 + r_2 = ?$

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

- 16 求 $t \cos(at)$ 之拉普拉斯轉換 (Laplace transform)：

- (A) $\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$ (B) $\frac{2s^2}{(s^2 + a^2)^2}$ (C) $\frac{2(s+a)}{(s^2 + a^2)^2}$ (D) $\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$

- 17 試問下列何者不滿足二維拉普拉斯方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ？

- (A) $u = x^3 - 3xy^2$ (B) $u = x/(x^2 + y^2)$
(C) $u = x/y - y/x$ (D) $u = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$

- 18 某離散隨機變數 X 之質量函數為 $P(-2) = P(1) = P(2) = 0.15$ ， $P(3) = 0.55$ ，試問期望值 $E[X]$ 為何？

- (A) 0.6 (B) 1 (C) 1.5 (D) 1.8

- 19 設隨機變數 (random variable) X 和 Y 的聯合機率密度函數 (joint probability density function) 為

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} a(x+y)^2, & -2 < x < 2 \text{ and } -3 < y < 3 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \text{。則 } a \text{ 之值為何？}$$

- (A) 1/104 (B) 1/36 (C) 1/24 (D) 1/6

- 20 令 X_i ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，為獨立高斯隨機變數 (Gaussian random variables)，其 $E[X_i] = \mu_i$ ， $\text{Var}[X_i] = \sigma_i^2$ ，亦

即 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ，下列何者錯誤？

- (A) $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i) \sim N\left(0, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$
(B) $\sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$
(C) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i, \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$
(D) $\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i^2, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$