

104年公務人員特種考試司法人員、法務部調查局調查人員、國家安全局國家安全情報人員、海岸巡防人員及移民行政人員考試試題

代號：30860 全一頁

考試別：國家安全情報人員

等別：三等考試

類科組：數理組

科目：線性代數

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、令 $T: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$ ，其中 $P_n(\mathbb{R})$ 是代表次數小於或等於 n 的實係數多項式且 $T(f(x)) = f'(x) + \int_0^x f(t)dt$ 。(每小題 10 分，共 30 分)

(一)證明 T 為線性轉換 (linear transformation)。

(二)令 $\beta = \{1, x, x^2\}$ ， $\beta' = \{1, x, x^2, x^3\}$ ，求算 $[T]_{\beta'}^{\beta}$ 。此處 $[T]_{\beta'}^{\beta}$ 代表線性轉換 T 在有序基底 (ordered basis) β 和 β' 的矩陣表示。

(三) T 是否為 1 對 1 函數？(未說明理由的答案不給分)

二、令 $A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$ 。(每小題 10 分，共 20 分)

(一)求 $\det(A)$ ，此處 $\det(A)$ 代表矩陣 A 的行列式值。

(二)何種條件下的數 a, b, c, d 會使得 A 矩陣之列向量式線性獨立？

三、(引用定理)解釋下列那些矩陣和線性轉換可對角線化 (diagonalized)：

(一) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。(5 分)

(二) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ 。(5 分)

(三) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ 。(5 分)

(四) $T: P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$ 且 $T(f(x)) = f'(x) + f''(x)$ 。(10 分)

四、令 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 是 A 矩陣的相異固有值 (eigenvalues)，而 $v_1, v_2, \dots, v_k$ 是其相對應的固有向量 (eigenvectors)。試證明 $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ 為線性獨立。(25 分)