

104年公務人員特種考試司法人員、法務部調查局調查人員、國家安全局國家安全情報人員、海岸巡防人員及移民行政人員考試試題

代號：30830 全一頁

考試別：國家安全情報人員

等別：三等考試

類科組：數理組

科目：數論

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、(一)設 F_3 為一個 3 個元素的有限體。若 α 為佈於 F_3 的多項式 $1+2x+x^3$ 的一個根，試證明 α 為有限體 $F_3[\alpha]$ 的一個原元素 (primitive element)。(10 分)

(二)求下列同餘聯立方程式的解：(10 分)

$$2x \equiv 1 \pmod{3}$$

$$3x \equiv 2 \pmod{5}$$

$$5x \equiv 4 \pmod{7}$$

二、一個合成數 (composite number) n 滿足對所有整數 a ， $1 \leq a \leq n$ ， $a^n \equiv a \pmod{n}$ 都成立；稱為卡邁克爾數 (Carmichael number)。(每小題 10 分，共 20 分)

(一)試證明 561 是一個卡邁克爾數。

(二)設 n 為一個卡邁克爾數，試證明每一個 n 的質因數 p 都滿足 $p-1$ 整除 $n-1$ 。

三、設 f 為一個算術函數且令 $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ 。(每小題 10 分，共 20 分)

(一)試證明若 f 是可乘函數，則 F 亦為可乘函數。

(二)反之，試證明上面敘述(一)的逆敘述亦成立。

四、設 p 為一滿足 $p \equiv 1 \pmod{4}$ 之質數。若 $q = 2p+1$ 亦為一個質數，試證明 2 必為 $\text{mod } q$ 的原根 (primitive root)。(20 分)

五、(一)在方程式 $x^2 - 2y^2 = 1$ 所有的正整數解 (x, y) 中，使得 $x + y\sqrt{2}$ 最小的解稱為此方程式的基本解。已知方程式 $x^2 - 2y^2 = 1$ 的基本解為 $(3, 2)$ 。試證明此方程式所有的正整數解為 (x_k, y_k) ，其中 $x_k + y_k\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^k$ ， $k = 1, 2, 3, \dots$ 。(10 分)

(二)試證明每一個整數都可以表示成五個整數的立方和。(10 分)