

代號：70860
70960
頁次：4-1

104 年公務人員特種考試警察人員、一般警察人員考試及 104 年
特種考試交通事業鐵路人員、退除役軍人轉任公務人員考試試題

等 別：高員三級鐵路人員考試

類 科 別：電力工程、電子工程

科 目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、設矩陣 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ ，

(一)求 A 的特徵值 (eigenvalues)。(5 分)

(二)求 A 的特徵向量 (eigenvectors)。(5 分)

(三)求 A^{20} 。(5 分)

二、考慮有一個週期性函數 $f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 4 \end{cases}$ ，週期為 4，請將 $f(x)$ 表示成傅立葉三角級數 (Fourier trigonometric series)。(15 分)

三、請利用留數 (residue) 求 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x-5}{(x+1)(x^2+4)} dx$ 之值。(10 分)

四、若 X 與 Y 是兩隨機變數 (random variables)，滿足 $E[X]=0$ ， $E[Y]=-1$ ， X 的均方差 (variance) $\sigma_X^2=2$ ， $E[Y^2]=4$ ， $E[XY]=-2$ 。設隨機變數 W 與 U 分別為 $W=2X+Y$ ， $U=-X-3Y$ 。(E[*]表示*的期望值 (mean value))。求：

(一) $E[W^2]$ 。(3 分)

(二) $E[WU]$ 。(3 分)

(三) Y 的均方差 (variance)： σ_Y^2 。(4 分)

乙、測驗題部分：(50 分)

代號：6708

(一)本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 設 $\mathbf{v}(t)$ 為一向量函數，若已知其長度為一非零常數，則下列何者為不可能？(A) $\mathbf{v}'(t)$ 為零向量(B) $\mathbf{v}'(t)$ 和 $\mathbf{v}(t)$ 正交(C) $\mathbf{v}'(t)$ 為非零向量且平行於 $\mathbf{v}(t)$ (D) $\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$ 為常數 (註：" $\cdot$ " 表內積運算)2 令向量場 $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + 2z^2\mathbf{k}$ ，則在 $(1, 1, -1)$ 處的散度 (divergence) $\nabla \cdot \mathbf{F}$ 為何？

(A) -1

(B) 0

(C) 4

(D) 8

3 若 $\mathbf{u} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ 且 $\mathbf{v} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$ ，則 $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ 為：(A) $\mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u})$ (B) $2xy + 2yz + 2zx$ (C) $\mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$ (D) $xy + yz + zx$ 4 若 $\mathbf{F} = 2x\cos(2y)\mathbf{i} - 2x^2\sin(2y)\mathbf{j}$ ， C 為從 $(1, \pi)$ 到 $(2, \pi)$ 之某一曲線，求 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ ：

(A) 3

(B) 6

(C) $4 - \cos(2)$ (D) $4 + \cos(2)$

5 下列何者是正交矩陣 (orthogonal matrix)？

(A) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

6 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ，則 A^{-1} 的行列式值 (determinant) 為何？

(A) 0.1

(B) 10

(C) -10

(D) -0.1

7 若矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & -12 \end{bmatrix}$ ，則 A 的零空間 (nullspace) 之維度為：

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

8 一矩陣 $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ，下列何者不是矩陣 A 的特徵向量 (characteristic vector)？

(A) $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

- 9 設複數 $z = 6 + i8 = re^{i\theta}$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ ，則 (r, θ) 為何？
- (A)(6, 8) (B)(6, $\tan^{-1}(8)$) (C)(8, $\tan^{-1}(6)$) (D)(10, $\tan^{-1}(4/3)$)
- 10 令 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 為一複數級數 (complex series)，則下列敘述何者為錯誤？(註：答案中 q 是一個小於 1 的定值， N 是一個正數)
- (A) 若 $\sqrt[n]{|z_n|} \leq q < 1, \forall n > N$ ，則此級數絕對收斂 (absolutely convergent)
- (B) 若 $\sqrt[n]{|z_n|} < 1, \forall n > N$ ，則此級數收斂
- (C) 若 $\sqrt[n]{|z_n|} = 1, \forall n > N$ ，則此級數發散
- (D) 若 $\sqrt[n]{|z_n|} > 1, \forall n > N$ ，則此級數發散
- 11 令 $g(z) = \frac{1}{z}$ ，其中 $z \neq 0$ ，若 $z = x + iy$ ，則有關 $g(z)$ 的敘述何者正確？
- (A) 實部為 $-\frac{x}{x^2 + y^2}$ (B) 實部為 $-\frac{y}{x^2 + y^2}$ (C) 虛部為 $-\frac{x}{x^2 + y^2}$ (D) 虛部為 $-\frac{y}{x^2 + y^2}$
- 12 下列選項中 c_1, c_2 為任意常數。解微分方程式 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2.5xy - 2y = 0$ ：
- (A) $y = c_1 \sqrt{x} + c_2 x^4$ (B) $y = \frac{c_1}{\sqrt{x}} + c_2 x^4$ (C) $y = c_1 \sqrt{x} + c_2 x^{-4}$ (D) $y = \frac{c_1}{\sqrt{x}} + c_2 x^{-4}$
- 13 求解微分方程 $\frac{dr}{d\theta} = b[(\frac{dr}{d\theta}) \cos \theta + r \sin \theta], r(\frac{\pi}{2}) = \pi, 0 < b < 1$ ：
- (A) $r = \pi(1 - b \cos \theta)$ (B) $r = \pi(1 + b \cos \theta)$ (C) $r = \pi(b - \cos \theta)$ (D) $r = b(\pi - b \cos \theta)$
- 14 一微分方程式 $(x^2 - x)y'' - xy' + y = 0$ ，已知有一解為 $y_1 = x$ ，則下列何者為正確？
- (A) 另一解為 $y_2 = x \ln x + 1$ 且 y_2 與 y_1 為線性相依 (B) 另一解為 $y_2 = x \ln x + x$ 且 y_2 與 y_1 為線性相依
- (C) 另一解為 $y_2 = x \ln x + 1$ 且 y_2 與 y_1 為線性獨立 (D) 另一解為 $y_2 = x \ln x + x$ 且 y_2 與 y_1 為線性獨立
- 15 定義函數 $f(t)$ 之拉氏轉換 (Laplace transform) $L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ ，令 $L\{f(t)\} = \frac{(s^2 - 4)e^{-s}}{(s^2 + 4)^2}$ ，則 $f(t)$ 為何？其中 $u(t)$ 為單位步階 (unit step) 函數。
- (A) $[(t-1)\cos 2(t-1)]u(t-1)$ (B) $(t-1)\cos 2(t-1)$
- (C) $(t-1)[\cos 2t - 2\sin 2t]$ (D) $(t-1)[\cos 2t - 2\sin 2t]u(t-1)$

- 16 設 $y = a(t)$ 為 $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 6$ 之解，則 $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t)$ 之值為何？
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4
- 17 定義傅立葉轉換 (Fourier transform) 為 $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ ，若 $f(x)$ 之傅立葉轉換為 $F(\omega) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\cos(\omega) - 1}{\omega}$ ，試問 $f(x)$ 為何？
- (A) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{if } 0 < x < 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (B) $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{if } x > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
- (C) $f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & \text{if } x > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (D) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{if } -1 < x < 0 \\ 1, & \text{if } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
- 18 投擲一個公正的硬幣 5 次，求正好 3 次正面朝上的機率為何？
- (A) 3/8 (B) 5/16 (C) 5/8 (D) 11/16
- 19 兩離散隨機變數 X 、 Y 之結合機率為 $P(X = x, Y = y) = A(2x + 3y)$ ，其中 $x = 1, 2$ ； $y = 1, 2, 3$ ，則 $A = ?$
- (A) $\frac{1}{54}$ (B) $\frac{1}{36}$ (C) $\frac{1}{24}$ (D) $\frac{1}{12}$
- 20 已知某一電話總機在單位時間內收到之電話數目遵守平均每分鐘 4 通之 Poisson 分布，令 X 表示收到 2 通電話之等待時間（分鐘），求 $P(X \leq 1)$ 為何？
- (A) $1 - 4e^{-2}$ (B) $1 - 5e^{-2}$ (C) $1 - 4e^{-4}$ (D) $1 - 5e^{-4}$