

113年專門職業及技術人員高等考試建築師、
32類科技師（含第二次食品技師）、大地工程
技師考試分階段考試（第二階段考試）
暨普通考試不動產經紀人、記帳士考試試題

等 別：高等考試

類 科：電子工程技師

科 目：工程數學（包括線性代數、微分方程、向量分析、複變函數與機率）

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目得以本國文字或英文作答。

一、考慮下列之 5 階常微分方程：

$$\frac{d^5 v}{dt^5} + v = v_s$$

假設初始值為 $v(0)=1, \dot{v}(0)=0, \ddot{v}(0)=0, \ddot{v}(0)=0, v^{(4)}(0)=0$ 。

$$\text{令 } \sigma_1 = \cos \frac{\pi}{5}, \omega_1 = \sin \frac{\pi}{5}, \sigma_2 = \cos \frac{3\pi}{5}, \omega_2 = \sin \frac{3\pi}{5}$$

(一)請求 $v(t)$ 之齊次解 (homogeneous solution)，請以上面係數 $(\sigma_1, \omega_1, \sigma_2, \omega_2)$ 將齊次解表示為實數函數。(15 分)

(二)若 $v_s(t) = e^{-2t}$ ，請求 $v(t)$ 之特解 (particular solution)。(5 分)

二、考慮一個二次型 (quadratic form)：

$$P = x^T Q x, \text{ 其中 } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

(一)請求矩陣 Q 之特徵值與對應之特徵向量。(20 分)

(二)請判斷此二次型為 (半) 正定 (positive (semi) definite)、(半) 負定 (negative (semi) definite) 或皆不是？若限制 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ ，請求此二次型之極大與極小值。(10 分)

三、考慮一偏微分方程式：

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$$

其初始條件為 $T(x, 0) = 2, 0 \leq x \leq 1$ ，邊界條件為 $T(0, t) = 0$ 與 $\left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=1} = 1$ 。

(一) 請求其穩態時（時間很大時，即 $t \rightarrow \infty$ ）之解。（提示：穩態解對時間不再變化，只與空間變數有關）（10 分）

(二) 請求此問題之特徵函數（eigenfunctions）。（提示：先做座標轉換，移除穩態解，使邊界條件為齊次，再以分離變數法求特徵函數）（20 分）

四、考慮一電力場：

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} F_x(x, y) \\ F_y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x + 3y \\ x + 2y \end{bmatrix}$$

(一) 如圖一所示，有一半圓路徑 C 。若有一帶電粒子沿此路徑移動，從 $(1, 0)$ 移動至 $(-1, 0)$ ，請求此電力場對此粒子運動所作之功，即求 $W = \int_C F \cdot dr$ ， $r = (x, y)$ 為粒子質點位置。（10 分）

(二) 如圖二所示，此粒子再由 $(-1, 0)$ 沿水平直線移動至 $(1, 0)$ ，形成一封閉路徑。請以格林定理（Green's theorem）求此電力場對此粒子沿此封閉路徑運動所作之功。（10 分）

