

等 別：高等考試

類 科：電子工程技師

科 目：工程數學（包括線性代數、微分方程、向量分析、複變函數與
機率）

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、有一定義在 $D \equiv R^3 - \{(0,0,z) | z \in R\}$ 的向量場 $\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right)$ 。

(一)計算 $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ 在 D 中的值。(10 分)

(二)在 D 中是否存在一位勢 $V(x,y,z)$ 使得 $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ ？若有，計算 $V(x,y,z)$ ；若無，證明之。(10 分)

二、在 R^2 平面上，A 點與 B 點的座標分別為 A：(2,1)；B：(4,3)。計算 C 點座標使得 $\triangle ABC$ 構成一正三角形。(20 分)

三、設 $V \equiv R^2$ 為一實數體 (Field) $F \equiv R$ 向量空間。 $\alpha \equiv \{\alpha_1, \alpha_2\}$ 為 V 之一組基底。 $f: V \rightarrow F$ 為一線性變換。所有 f 的全體亦構成一向量空間，記為 V^* 。定義 $f_1, f_2 \in V^*$ 如下：

$$f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2$$

(一)證明 f_1, f_2 為線性獨立。(10 分)

(二)設 $f(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2) = 3x_1 + 5x_2$ ($x_i \in R$)， $f \in V^*$ 。將 f 表示成 f_1, f_2 的線性組合。(10 分)

四、利用尤拉 (Euler) 式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ，將 $\sin 4\theta$ 表示成 $\cos \theta$ 及 $\sin \theta$ 的多項式函數，即 $\sin 4\theta = P(\cos \theta, \sin \theta)$ 。(20 分)

五、求微分方程式 $y'' + 2y' + y = \sin 2x$ 的通解。(20 分)