

大學入學考試中心
九十六學年度指定科目考試試題
數學甲

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：第壹部分請用 2B 鉛筆在答案卡之「解答欄」內劃記。修正時應以橡皮擦拭，請勿在答案卡上使用修正液。

第貳部分作答於「非選擇題答案卷」，請在規定之欄位以較粗的黑色或藍色原子筆、鋼珠筆或中性筆作答，並標明題號。

第壹部分作答示例：請仔細閱讀下面的例子。

(一) 單選題及多選題：只用 1, 2, 3, 4, 5 等五個格子，而不需要用到 -, $\pm$ 以及 6, 7, 8, 9, 0 等格子。

例：若第 1 題為單選題，選項為(1)3 (2)5 (3)7 (4)9 (5)11，而正確的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列 ☐3 劃記（注意不是 7），如：

解 答 欄												
1	☐ 1	☐ 2	☒ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9	☐ 0	☐ -	☐ $\pm$

例：若第 5 題為多選題，正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡的第 5 列的 ☐1 與 ☐3 劃記，如：

5	☒ 1	☐ 2	☒ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9	☐ 0	☐ -	☐ $\pm$
---	---------------------------------------	----------------------------	---------------------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	--------------------------------

(二) 選填題的題號是 A, B, C, ..., 而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{(20)(21)}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 ☐- 與第 21 列的 ☐7 劃記，如：

20	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9	☐ 0	☒ -	☐ $\pm$
21	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☒ 7	☐ 8	☐ 9	☐ 0	☐ -	☐ $\pm$

祝考試順利

第壹部分：選擇題 (單選題、多選題及選填題共佔 79 分)

一、單選題 (18 分)

說明：第 1 至 3 題為單選題，每題選出一個最適當的選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題答對得 6 分，答錯或劃記多於一個選項者倒扣 1.5 分，倒扣到本大題之實得分數為零為止。未作答者，不給分亦不倒扣分數。

1. 設 $z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$ ，試問複數 $1-z$ 的絕對值為以下哪一選項？

- (1) $2 \sin \frac{\pi}{7}$
- (2) $\sin \frac{2\pi}{7}$
- (3) $\sqrt{2} \sin \frac{2\pi}{7}$
- (4) $\sqrt{2} (1 - \cos \frac{2\pi}{7})$
- (5) $\sqrt{1 - \cos \frac{2\pi}{7}}$

2. 試問下列有關極限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|3-3x-x^2|-1}{x-1}$ 的敘述何者正確？

- (1) 極限不存在
- (2) 極限為 0
- (3) 極限為 1
- (4) 極限為 5
- (5) 極限為 -2

3. 設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ 是一等比數列，其首項 $a_1 > 1$ 且公比 $r > 1$ 。坐標平面上有一質點 M 自原點 $(0, 0)$ 出發，依以下規則連續移動十次：第一次移動往右 $\log a_1$ 單位，第二次移動向上 $\log a_2$ 單位，第三次移動往右 $\log a_3$ 單位，第四次移動向上 $\log a_4$ 單位，依此類推直到第十次；即第 $2k-1$ 次的移動是往右 $\log a_{2k-1}$ 單位，接著第 $2k$ 次的移動是向上 $\log a_{2k}$ 單位。已知經過這十次的移動後，該質點 M 停在點 $(5 + 5\log 2, 5 + \frac{15}{2}\log 2)$ 的位置上，試問首項 a_1 與公比 r 組成的序對 (a_1, r) 為以下哪

一選項？

- (1) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (2) $(2\sqrt{2}, \sqrt{5})$
(3) $(2, \sqrt{2})$ (4) $(5, \sqrt{5})$
(5) $(5, \sqrt{2})$

二、多選題(40 分)

說明：第 4 至 8 題，每題各有 5 個選項，其中至少有一個是正確的。選出正確選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題 8 分，各選項獨立計分，每答對一個選項，可得 1.6 分，每答錯一個選項，倒扣 1.6 分，完全答對得 8 分；整題未作答者，不給分亦不倒扣分數。在備答選項以外之區域劃記，一律倒扣 1.6 分。倒扣到本大題之實得分數為零為止。

4. 某校高三共有 300 位學生，數學科第一次段考、第二次段考成績分別以 X 、 Y 表示，且每位學生的成績用 0 至 100 評分。若這兩次段考數學科成績的相關係數為 0.016，試問下列哪些選項是正確的？
- (1) X 與 Y 的相關情形可以用散佈圖表示
(2) 這兩次段考的數學成績適合用直線 $X = a + bY$ 表示 X 與 Y 的相關情形 (a, b 為常數， $b \neq 0$)
(3) $X+5$ 與 $Y+5$ 的相關係數仍為 0.016
(4) $10X$ 與 $10Y$ 的相關係數仍為 0.016
(5) 若 $X' = \frac{X - \bar{X}}{S_X}$ 、 $Y' = \frac{Y - \bar{Y}}{S_Y}$ ，其中 $\bar{X}$ 、 $\bar{Y}$ 分別為 X 、 Y 的平均數， S_X 、 S_Y 分別為 X 、 Y 的標準差，則 X' 與 Y' 的相關係數仍為 0.016

5. 設 $P(x)$ 是一個五次實係數多項式。若 $P(x)$ 除以 $x-3$ 的餘式是 2，且商 $Q(x)$ 是一個係數均為正數的多項式，試問下列哪些選項是正確的？

- (1) $P(x)=0$ 與 $Q(x)=0$ 有共同的實根
- (2) 3 是 $P(x)=2$ 唯一的實根
- (3) $P(x)$ 不能被 $x-4$ 整除
- (4) $P(x)=0$ 一定有小於 3 的實根
- (5) $P(x)$ 除以 $(x-3)(x+3)$ 的餘式也是 2

6. 設 a 是不為零的實數，且以下的三元一次方程組有解：

$$\begin{cases} \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{3} \\ \frac{y-5}{3} = z-4 \\ \frac{x}{a} = z-2 \\ \frac{y+1}{3} = z-2 \end{cases}$$

試問下列哪些選項是正確的？

- (1) $a=2$
- (2) 原方程組有唯一解
- (3) 方程組 $\begin{cases} \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{3} \\ \frac{x}{a} = z-2 \end{cases}$ 有無窮多解
- (4) 方程組 $\begin{cases} \frac{x}{a} = z-2 \\ \frac{y+1}{3} = z-2 \end{cases}$ 有唯一解
- (5) 方程組 $\begin{cases} \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{3} \\ \frac{y-5}{3} = z-4 \end{cases}$ 有無窮多解

7. 有關矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 與矩陣 $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ，試問下列哪些選項是正確的？

- (1) $AB = BA$
- (2) $A^2B = BA^2$
- (3) $A^{11}B^3 = B^6A^5$
- (4) $AB^{12} = A^7$
- (5) $(ABA)^{15} = AB^{15}A$

8. 考慮坐標平面上函數 $y = x^3 + 2x + 3$ 的圖形 (x 為任意實數)，試問下列哪些選項是正確的？

- (1) 圖形有最高點，也有最低點
- (2) 圖形有水平切線
- (3) 圖形與任一水平直線恰有一交點
- (4) 若 (a, b) 在圖形上，則 $(-a, -b+6)$ 也在圖形上
- (5) 圖形與三直線 $x=0, x=1, y=0$ 所圍成的區域之面積大於 4

三、選填題(21 分)

說明：A 至 C 各題為選填題，劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (9-18)內。
每一題完全答對得 7 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

- A. 某公司共有 6 個工廠，各工廠的產量都一樣，且所生產的產品都放進同一倉庫中。由過去的經驗知道，第 k 個工廠的產品不良率為 $\frac{k}{50}$ ，其中 $k=1,2,3,4,5,6$ ，

爲了檢驗倉庫中這一批產品的品質，從倉庫中任意抽出一件，若爲不良品，則此不良品是來自第五個工廠的機率爲 $\frac{\textcircled{9}}{\textcircled{10}\textcircled{11}}$ 。（化成最簡分數）

- B. 在坐標平面上，一圓通過點 $(-2,7)$ ，且與直線 $4x+3y-14=0$ 相切於點 $(-1,6)$ ，若此圓的方程式爲 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ，則 $a=\textcircled{12}\textcircled{13}$ ， $b=\textcircled{14}\textcircled{15}$ ， $c=\textcircled{16}$ 。

- C. 張師傅想爲公司設計底面爲正方形且沒有蓋子的一個長方體紙盒，裡面白色，外面灰色。在灰色部分的面積爲 432 平方公分的限制之下，爲了使紙盒的容量達到最大，他應將此無蓋長方體紙盒的底面每邊邊長設計爲 $\textcircled{17}\textcircled{18}$ 公分。

— — — — — 以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷 — — — — —

第貳部分：非選擇題 (佔 21 分)

說明：本大題共有二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號 (一、二)與子題號((1)、(2))，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。每題配分標於題前。

一. 設 $f(x)=x^3-6x^2-x+30$ ，且 a, b 是方程式 $f(x)=0$ 的兩正根。

(1) (3分) 求解三次方程式 $f(x)=0$ 。

(2) (8分) 若 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AC}=a$, $\overline{BC}=b$, $\angle ACB=120^\circ$ ，且 D, E 是 $\overline{AB}$ 上兩點，滿足 $\overline{BD}=\overline{BC}$, $\overline{AE}=\overline{AC}$ ，試求 $\triangle CDE$ 的面積。

二. 設 $\triangle ABC$ 的三頂點坐標分別為 $A(-2, 7, 15)$ 、 $B(1, 16, 3)$ 、 $C(10, 7, 3)$ 。

(1) (5分) 試求通過 A 、 B 、 C 三點的平面方程式。

(2) (5分) 試求 $\triangle ABC$ 的外心坐標。