

代號：25720
|
25920
28320
頁次：4-1

106年公務人員高等考試三級考試試題

類 科：電力工程、電子工程、電信工程、醫學工程

科 目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、計算 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 最小平方問題 (least square problem) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 的解。（10 分）

二、矩陣 $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ：

(一)求 M 之特徵值 (eigenvalue)。（5 分）

(二)求矩陣 P 以滿足 $P^{-1}MP$ 為對角矩陣 (diagonal matrix)。（5 分）

(三)求 M^4 。（5 分）

三、設微分方程式 $y'' + ay' + by = -65\sin 2t$ ， $y(0) = y_0$ ， $y'(0) = y'_0$ 的解 $y(t)$ 的拉普拉斯轉

換為 $Y(s) = \frac{13s^3 + 45s^2 + 52s + 50}{s^4 + 4s^3 + 7s^2 + 16s + 12}$ 。

(一)求常數 a 、 b 、 y_0 及 y'_0 之值。（8 分）

(二)求微分方程式的解 $y(t)$ 。（7 分）

四、每一次白努利試驗 (Bernoulli trials) 中，成功之機率為 p ，失敗之機率為 $q = 1 - p$ ，

則代表在 n 次獨立試驗中成功次數的二項式隨機變數 x ，其機率分布

$F(x) = C_x^n p^x q^{n-x}$ ， $x = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ 。若 $F(x)$ 在 $x = x_0$ 處有極大值， x_0 之值為何？

(10 分)

乙、測驗題部分：（50 分）

代號：2257

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 試求由三點 $P_1(2, 2, 0)$, $P_2(-1, 0, 2)$, $P_3(0, 4, 3)$ 所決定之三角形的面積：

(A) 6.5

(B) 7

(C) 7.5

(D) 8

2 下列集合中之向量，何者為線性獨立（linearly independent）？

(A) $\{(3, 1, -4), (2, 0, -1), (3, -1, 1)\}$

(B) $\{(1, 2, 0), (-1, 1, 2), (3, 1, 5), (0, 1, -1)\}$

(C) $\{(1, 1, -2), (0, 1, 0), (2, 1, -1)\}$

(D) $\{(3, 1, 0), (2, -1, 1), (1, 0, 1), (2, 1, -1)\}$

3 一階微分方程式 $x^2 y' - xy - y^2 = 0$ 之解為：（其中 C 為常數。）

(A) $y = -\ln|x| + C$

(B) $y = \frac{x}{-\ln|x| + C}$

(C) $y = \frac{-\ln|x| + C}{x}$

(D) $-\ln|x| + C$

4 設 x 、 y 、 z 為任意實數，下列選項何者恆為正確？

(A) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy + 2xz \geq 0$

(B) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy + 4yz \geq 0$

(C) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy + 4xz + 4yz \geq 0$

(D) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \geq 0$

5 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ ，求 $\cos \mathbf{A}$ 。

(A) $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3\cos 3 & 3\cos 3 - 3\cos 2 \\ 2\cos 3 - 2\cos 2 & -2\cos 3 \end{bmatrix}$

(B) $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3\cos 3 + 2\cos 2 & 3\cos 3 - 3\cos 2 \\ 2\cos 3 - 2\cos 2 & 2\cos 3 + 3\cos 2 \end{bmatrix}$

(C) $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3\cos 3 + 2\cos 2 & -3\cos 3 + 3\cos 2 \\ -2\cos 3 + 2\cos 2 & 2\cos 3 + 3\cos 2 \end{bmatrix}$

(D) $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3\cos 3 - 2\cos 2 & 3\cos 3 + 3\cos 2 \\ 2\cos 3 + 2\cos 2 & 2\cos 3 - 3\cos 2 \end{bmatrix}$

6 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ，設 $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$ ，試求 $f(A)$ 為何？

(A) $f(A) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (B) $f(A) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (C) $f(A) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (D) $f(A) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

7 $i = \sqrt{-1}$ ，展開複數函數 $f(z) = \cosh(5 - 2i)$ 為：

(A) $f(z) = \cosh 5 \cosh 2 - i \sinh 5 \sinh 2$ (B) $f(z) = \cosh 5 \cos 2 - i \sinh 5 \sin 2$

(C) $f(z) = \cos 5 \cosh 2 - \sin 5 \sinh 2$ (D) $f(z) = \cos 5 \cos 2 - i \sin 5 \sin 2$

8 $i = \sqrt{-1}$ ， $i^{1+i} = ?$

(A) $\sqrt{2}(1+i)$ (B) $\sqrt{2}(1-i)$

(C) $ie^{-(2n\pi + \pi/2)}$ ， n 為任意整數 (D) $i^{\sqrt{2}}e^{2n\pi - \pi/2}$ ， n 為任意整數

9 假設 C 為 $|Z| = 3$ 之逆時針方向的圓周，求 $\oint_C \frac{e^{3Z}}{Z^4} dZ = ?$ ($i = \sqrt{-1}$)

(A) $4\pi i$ (B) πi (C) $9\pi i$ (D) $-2\pi i$

10 假設微分方程式 $y' + 4y = \cos t$ 且 $y(0) = 0$ ，下列何函數不會出現在 $y(t)$ 的解之中？

(A) e^{-4t} (B) $\cos t$ (C) $\sin t$ (D) e^{-t}

11 $y'' - 3y' - 4y = 8x^2$ ， $y(0) = 1$ ， $y'(0) = 2$ ，其中 $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ ， $y' = \frac{dy}{dx}$ ，則 $y''(0) = ?$

(A) 10 (B) 6 (C) 4 (D) 0

12 設微分方程式 $xy'' + 2y' = 6x$ ，且 $y(1) = 1$ ， $y'(1) = 2$ ，則下列何者正確？

(A) $y(2) = 2$ (B) $y(-1) = -1$ (C) $y'(2) = -2$ (D) $y'(-1) = -2$

13 設 $x(t)$ 為 $\frac{dy(t)}{dt} - 3y(t) = 6$ 之解，則 $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)$ 之值為何？

(A) ∞ (B) 6 (C) 0 (D) -2

14 z 為複數 (Complex variable)，則 $\int_0^{1+i} z^2 dz = ?$ ($i = \sqrt{-1}$)

(A) $\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$ (B) $\frac{2}{3} - \frac{2}{3}i$ (C) $-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$ (D) $-\frac{2}{3} - \frac{2}{3}i$

15 試求冪級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$ 之收斂半徑。

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

16 求 $\ln\left(\frac{s+1}{s-1}\right)$ 之反拉普拉斯轉換。

(A) $\frac{\sinh(t)}{t}$ (B) $\frac{2\sinh(t)}{t}$ (C) $\frac{\sinh(t)}{2t}$ (D) $\frac{2\sin(t)}{t}$

17 求 $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < -1 \\ x, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$, $f(x+4) = f(x)$, 週期 $p=4$ 之傅立葉級數 (Fourier series) 。

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\cos n\pi/2}{n\pi} - \frac{4\sin(n\pi/2)}{(n\pi)^2} \right) \sin \frac{n\pi x}{2}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2\cos n\pi/2}{n\pi} + \frac{4\sin(n\pi/2)}{(n\pi)^2} \right) \sin \frac{n\pi x}{2}$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2\cos n\pi/2}{n\pi} - \frac{4\sin(n\pi/2)}{(n\pi)^2} \right) \sin \frac{n\pi x}{2}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\cos n\pi/2}{n\pi} + \frac{4\sin(n\pi/2)}{(n\pi)^2} \right) \sin \frac{n\pi x}{2}$

18 給定一個隨機變數 x , 其累積分布函數 (cumulative distribution function) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1/4, & 1 \leq x < 3 \\ 1/2, & 3 \leq x < 5 \\ 3/4, & 5 \leq x < 7 \\ 1, & x \geq 7 \end{cases}$, 求機率

$P(x \leq 5 | x \geq 2)$ 之值為何?

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$

19 假設產品是否為不良品是互相獨立的事件。已知某公司所生產之手機的不良率為 1% , 若此公司以 10 台手機為一包裝銷售 , 且保證 10 台手機中最多只有 1 台不良品 , 否則就退貨。試求賣出包裝好的產品中退貨的比例為多少? 提示: $(0.99)^9 \approx 0.9135$ 。

(A) 0.2%

(B) 0.4%

(C) 0.6%

(D) 0.8%

20 設隨機變數 (random variable) X 和 Y 的聯合機率密度函數 (joint probability density function) 為

$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/24, & 0 < x < 6 \text{ 且 } 0 < y < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 則 $E[X^2Y^2]$ 之值為何? 其中 $E[Z]$ 定義為隨機變數 Z 的期望值。

(A) 8

(B) 16

(C) 32

(D) 64