

107年公務人員特種考試警察人員、一般警察人員考試及
107年特種考試交通事業鐵路人員考試試題

考試別：鐵路人員考試

等別：高員三級考試

類科別：電力工程、電子工程

科目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、若線性轉換（linear transformation）矩陣 $T: R^2 \rightarrow R^2$ 的作用是將在 R^2 上的向量逆時針旋轉角度 θ ，試以詳細計算過程求出：

(一)此線性轉換矩陣。（7 分）

(二)順時針旋轉角度 θ 的線性轉換矩陣。（3 分）

二、假設隨機變數 X 的累積分布函數（cumulative distribution function）可以表示成

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ \frac{x^2}{7} & \text{if } 0 \leq x < 1 \\ \frac{2x}{7} - \frac{1}{7} & \text{if } 1 \leq x < 3 \\ \frac{5x}{7} - \frac{x^2}{14} - \frac{11}{14} & \text{if } 3 \leq x < 5 \\ 1.0 & \text{if } 5 \leq x \end{cases}$$

(一)試求出隨機變數 X 的機率密度函數（probability density function） $f(x)$ 為何？（5 分）

(二)試求出 $P(1 \leq X \leq 4) = ?$ （5 分）

三、試求複變函數 $f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$ 對 $z_0 = 0$ 展開的所有泰勒級數（Taylor series）及羅倫級數（Laurent series）。（15 分）

四、利用 Frobenius 級數 $y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ 的方法求解微分方程式 $(x^2 - x)y'' - xy' + y = 0$ 。（15 分）

乙、測驗題部分：（50 分）

代號：4704

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 向量 $u = (-1, 4, 2, 3)$ 於向量 $v = (-1, 0, 2, 2)$ 之投影 (projection) 的長度為何？

- (A) $\frac{11}{3}$ (B) $\frac{11}{9}$ (C) $\frac{11}{\sqrt{30}}$ (D) $\frac{11}{30}$

2 下為敘述何者恆真？

- (A) V 為向量空間 (vector space)， W 是 V 的子集合 (subset)，則 W 是 V 的子空間 (subspace)
 (B) 空集合為任意一向量空間的子空間
 (C) V 為非零向量空間，則 V 包含一子空間 W 且 $W \neq V$
 (D) V 的任意二個子集合的交集 (intersection) 仍然是 V 的子空間

3 試求點 $(2, 0, 0)$ 到平面 $x + 2y + 2z = 0$ 的距離為何？

- (A) 1 (B) 2 (C) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (D) $\frac{2}{3}$

4 給定三個 $n \times n$ 之可逆矩陣 A 、 B 、 C ，下列敘述何者錯誤？

- (A) $(ABC)^T = C^T B^T A^T$
 (B) $(ABC)^{-1} = C^{-1} B^{-1} A^{-1}$
 (C) 若矩陣 A 是正交矩陣 (orthogonal matrix)，則矩陣 A 的反矩陣是 A^T
 (D) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

5 假設矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，且 A 的特徵值 (eigenvalues) $\lambda_1 = 1$ 、 $\lambda_2 = 5$ ，其對應的特徵向量 (eigenvectors) 分別為 $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，則 $a + b + c + d = ?$

- (A) 6 (B) 10 (C) 15 (D) 20

6 下列矩陣何者為非正交矩陣 (non-orthogonal matrix)？

- (A) $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

7 令 $e^z = 2 + i3$ ，則：

(A) $z = \ln(2) + i \ln(3)$

(B) $z = \ln(3) + i \ln(2)$

(C) $z = \frac{1}{2} \ln(9) + i \arctan\left(\frac{2}{3}\right)$

(D) $z = \frac{1}{2} \ln(13) + i \arctan\left(\frac{3}{2}\right)$

8 已知 $\{z_n = x_n + i y_n\}$ 為一複數數列，其中 x_n 及 y_n 分別代表 z_n 的實部及虛部，則下列敘述何者錯誤？

(A) 若複數數列 $\{z_n\}$ 為發散，則數列 $\{x_n\}$ 及 $\{y_n\}$ 至少其中之一為發散

(B) 若數列 $\{x_n\}$ 及 $\{y_n\}$ 其中之一為收斂，則複數數列 $\{z_n\}$ 可為收斂

(C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a + ib$

(D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a + ib$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$

9 求 $f(z) = \frac{\tan^2(z)}{z^2 \sin(z - \pi) \cos^3(z - \pi)}$ 在零點的極點次數 (pole order)：

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 4

10 已知微分方程式 $y'' + \alpha y' + \beta y = 0$ 的通解為 $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$ ，試求 α 、 β 之值，並判定下列何者正確？
(題中 α 、 β 、 c_1 、 c_2 為常數)

(A) $\alpha + \beta = 15$

(B) $\alpha + \beta = -15$

(C) $\alpha + \beta = 6$

(D) $\alpha + \beta = -6$

11 下列何者為 $x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0$ 之解？其中 a 、 b 為常數， $y' \equiv \frac{dy}{dx}$ ， $y'' \equiv \frac{d^2 y}{dx^2}$ 。

(A) $ax^3 + bx^3 \ln(x)$, $x > 0$

(B) $ae^{3x} + bxe^{3x}$, $x > 0$

(C) $e^{(5/2)x} [a \cos \sqrt{11}x + b \sin \sqrt{11}x]$, $x > 0$

(D) $e^{-(5/2)x} [a \cos \sqrt{11}x + b \sin \sqrt{11}x]$, $x > 0$

12 根據微分方程式 $(\sin x \cos x - xy^2)dx + y(1 - x^2)dy = 0$ 及其初始條件 $y(0) = 4$ ，請問下列何者為 y^2 之計算結果？

(A) $\frac{2 - \cos x}{1 - x}$

(B) $\frac{4 - \sin x}{1 - x}$

(C) $\frac{8 - \cos^2 x}{1 - x^2}$

(D) $\frac{16 - \sin^2 x}{1 - x^2}$

- 13 某一函數 $f(t)$ 的拉氏轉換 (Laplace Transform) 為 $F(s) = \frac{3s-1}{s^2-6s+25}$ ，則下列何者正確？
- (A) $f(0^+) = 2$ (B) $f(0^+) = 12$ (C) $f'(0^+) = 17$ (D) $f'(0^+) = 21$
- 14 假設聯立微分方程式 $\begin{cases} y_1' = -2y_1 + 3y_2, & y_1(0) = 4 \\ y_2' = 4y_1 - y_2, & y_2(0) = 3 \end{cases}$ (其中 $y_1' = \frac{dy_1}{dt}, y_2' = \frac{dy_2}{dt}$) 的解 $y_2(t) = ae^{2t} + be^{-5t}$ ， a, b 是常數，求 $a+2b = ?$
- (A) -2 (B) 2 (C) 3 (D) 5
- 15 假設微分方程式 $y'' - xy' + e^{2x}y = 8$ ，其中 $y(0) = 1$ 且 $y'(0) = 2$ ，若 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 為此微分方程式之級數解，求 $a_1 + a_2 + a_3$ 的值為何？
- (A) $\frac{7}{2}$ (B) $\frac{13}{2}$ (C) $\frac{31}{6}$ (D) $\frac{37}{6}$
- 16 考慮函數 $f(x) = 1 + \cos \pi x$ ，當 $x \notin [-1, 1]$ 時， $f(x) = 0$ ，求此函數之傅立葉轉換 (Fourier transform)？
- (A) $\sin \omega \left(\frac{2}{\omega} + \frac{1}{\pi + \omega} - \frac{1}{\pi - \omega} \right)$ (B) $\cos \omega \left(\frac{2}{\omega} + \frac{1}{\pi + \omega} - \frac{1}{\pi - \omega} \right)$
- (C) $\sin \omega \left(\frac{2}{\omega} - \frac{1}{\pi + \omega} + \frac{1}{\pi - \omega} \right)$ (D) $\cos \omega \left(\frac{2}{\omega} - \frac{1}{\pi + \omega} + \frac{1}{\pi - \omega} \right)$
- 17 下列何者為 $x[n] = \left(\frac{1}{2} \right)^{|n-1|}$ 的傅立葉轉換 $X(e^{j\omega})$ ？
- (A) $\frac{0.75e^{-j\omega}}{1.25 - \cos \omega}$ (B) $\frac{0.5e^{-j\omega}}{1.5 - \sin \omega}$ (C) $\frac{0.5e^{-j\omega}}{1.25 + \cos \omega}$ (D) $\frac{0.75e^{-j\omega}}{1.5 + \sin \omega}$
- 18 $x \in \Re$ 隨機均勻從 $[-1, 1]$ 區間選出，令事件 $A = \{x > 0.75\}$ ， $B = \{|x - 0.5| < 1\}$ ，求 $P[A \cup B] \cdot P[A \cap B] = ?$
- (A) $\frac{3}{32}$ (B) $\frac{5}{16}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{7}{8}$
- 19 投擲一顆公平的骰子並記錄獲得點數，再投擲另一顆公平的骰子且記錄獲得點數，試求第二次點數大於第一次點數之機率：
- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{5}{12}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{11}{18}$
- 20 設 X 為一隨機變數，它在每一可能值 $-1, 0, 1$ 的機率分別為 $P\{X = -1\} = 0.2$ ， $P\{X = 0\} = 0.5$ ， $P\{X = 1\} = 0.3$ ，求 $E[X^2]$ ：
- (A) 0.2 (B) 0.3 (C) 0.5 (D) 1