

考試別：身心障礙人員考試

等別：三等考試

類科：電力工程

科目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、請用拉普拉斯轉換（Laplace transform）解微分方程式：

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 30e^{-x}, y(0) = 3, y'(0) = -3, y''(0) = -47, \text{ 其中}$$

$$y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, y''' = \frac{d^3y}{dx^3}. \quad (10 \text{ 分})$$

$$\text{二、令矩陣 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & -6 & 6 \\ -9 & -8 & 12 \\ -12 & -12 & 16 \end{bmatrix}$$

(一)求矩陣 $\mathbf{X}$ 使得 $\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}$ 成為一對角矩陣（diagonal matrix）。（7 分）

(二)求 $\mathbf{A}^{50}$ 。（8 分）

三、令向量函數 $\mathbf{F} = [-y, x, z^2]$ ，曲線 C 為螺旋圓弧線 $\mathbf{r}(t) = [2\cos t, 2\sin t, t]$ 從 $(2, 0, 0)$ 到 $(-2, 0, \pi)$ ，試求下列線積分（line integral）。

$$(一) \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (5 \text{ 分})$$

$$(二) \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) dt \quad (5 \text{ 分})$$

四、已知 $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$ ， $|z| < 1$ 。請針對以下各範圍，以 $z = i$ 為中心，將一個複數函

數 $f(z) = \frac{5z+i2}{z(z+i)}$ 做級數展開（series expansion）：

$$(一) |z-i| < 1 \quad (8 \text{ 分})$$

$$(二) 2 < |z-i| < \infty \quad (7 \text{ 分})$$

乙、測驗題部分：(50 分)

代號：4309

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆 在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。1 若向量 $F = i + j + k$, $G = i - j - k$ ，則下列向量何者與 F, G 線性相依 (linearly dependent)？(A) i (B) j (C) k (D) $i + j - k$ 2 在二維平面上，點 $(7, -4)$ 到直線 $-4x + 3y - 10 = 0$ 的距離為何？

(A) 10

(B) 20

(C) 30

(D) 50

3 下列參數式 (parameter representation) $[x, y, z]$ 中，何者代表橢圓？(A) $[1, 2\cos t, -\sin t]$ (B) $[-\sin t, \cos 2t, 1]$ (C) $[2\cos t, -\sin t, t]$ (D) $[-\sin t, t, \cos 2t]$ 4 二函數分別為 $f = x + y - z$ 及 $g = xyz$ ，試求 $\nabla \cdot (\nabla(fg))$ ：(A) $2(yz + xz - xy)$ (B) $2(yz + xz + xy)$ (C) $yz + xz - xy$ (D) $yz + xz + xy$

5 下列何者為正交矩陣 (orthogonal matrix)？

(A) $\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 19 & 13 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 2-3i & 3+4i \\ 1-5i & i \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

6 令矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ，矩陣 B 滿足 $AB = BA$ ，則矩陣 B 可為何？

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7 令矩陣 $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ，有關其特徵值 λ 及特徵向量 (eigenvectors) $\mathbf{x}$ 何者錯誤？(A) $\lambda = 5$ (B) $\lambda = 3$

(C) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(D) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

- 8 令矩陣 A 為一 66×18 之矩陣且其秩 (rank) 為 13，若有 m 個線性獨立 (linearly independent) 向量滿足 $Ax = 0$ ，另若有 n 個線性獨立 (linearly independent) 向量滿足 $A^T y = 0$ ，其中右上標 T 表示轉置 (transpose)，則 $m+n$ 最大值為何？
- (A) 13 (B) 26 (C) 58 (D) 66
- 9 令 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 為一複數級數 (complex series)，若 $z_n \neq 0$ 且已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = L$ ，則下列敘述何者錯誤？
- (A) 若 $L < 1$ ，則此級數收斂 (B) 若 $L < 1$ ，則此級數絕對收斂 (absolutely convergent)
- (C) 若 $L > 1$ ，則此級數發散 (D) 若 $L = 1$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ ，則此級數收斂
- 10 假設 C 為沿著逆時針方向繞圓周 $|z - 2i| = 2$ ，試求積分 $\int_C \frac{\exp(z)}{(z^2 + \pi^2)} dz$ 為何？
- (A) 0 (B) i (C) $-i$ (D) -1
- 11 $\sqrt{17}e^{i(\pi - \tan^{-1}(4))}$ 化簡後可得：
- (A) $1 + 4i$ (B) $1 - 4i$ (C) $-1 + 4i$ (D) $-1 - 4i$
- 12 $y'' - xy' + 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1$
- 以級數法解得 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ，則 $\sum_{n=0}^2 a_n = ?$
- (A) 0 (B) -1 (C) 2 (D) 1
- 13 $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$ 滿足下列那種性質？其中 c 為實常數：
- (A) 拋物線型 (B) 橢圓型 (C) 熱傳導方程式 (D) 波動方程式
- 14 已知 $F(s) = \frac{3s - 4}{s^2 + 5s + 4}$ ，求其所對應之反拉氏轉換 (Inverse Laplace Transform) 函數 $f(t)$ ：
- (A) $\frac{7}{3}e^{-4t} + \frac{16}{3}e^{-t}$ (B) $-\frac{7}{3}e^{-t} + \frac{16}{3}e^{-4t}$ (C) $\frac{7}{3}e^{-t} - \frac{16}{3}e^{-4t}$ (D) $-\frac{7}{3}e^{-4t} + \frac{16}{3}e^{-t}$

15 一函數 $f(x) = e^{-3x}$, $x > 0$, 下列何者正確?

(A) $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos wx}{9+w^2} dw$

(B) $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin wx}{9+w^2} dw$

(C) $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{w \cos wx}{9+w^2} dw$

(D) $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{w \sin wx}{9+w^2} dw$

16 以級數 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 求解 $y'' + x^2 y' + 4y = 1 + x^2$, 則其所得到的遞迴關係式 (Recurrence relation) 為何?

(A) $(n+1)a_{n+2} + (n+2)(n+1)a_{n+1} + 4a_n = 0$ for $n = 2, 3, \dots$

(B) $(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_{n+1} + 4a_n = 0$ for $n = 2, 3, \dots$

(C) $(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_{n+1} + 4a_n = 0$ for $n = 2, 3, \dots$

(D) $(n+2)(n+1)a_{n+2} + 4a_n + (n-1)a_{n-1} = 0$ for $n = 2, 3, \dots$

17 下列何者為偶函數?

(A) $f(x) = x \cos x$

(B) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 6}$

(C) $f(x) = x^5 - 5x^3$

(D) $f(x) = \sin x$

18 自 $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ 中均勻且隨機 (uniformly and randomly) 挑出點 (x, y) , 令 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 試求當 $0 < r < 1$

時之累積分佈函數 (cumulative distribution function) 為何?

(A) r^4

(B) r^3

(C) r^2

(D) r

19 一射手射擊一目標 4 次, 每次射擊皆為獨立事件且命中之機率皆為 0.7, 試求該射手非全部命中亦非全部不命中之機率為何?

(A) $\frac{2401}{10000}$

(B) $\frac{2439}{5000}$

(C) $\frac{3759}{5000}$

(D) $\frac{8543}{10000}$

20 給定一個離散隨機變數 (discrete random variable) X , 它的機率質量函數 (probability mass function) 為

$$p(x) = \begin{cases} K \left(\frac{2}{3}\right)^x, & x = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \text{。則 } K \text{ 之值為何?}$$

(A) $1/2$

(B) $2/3$

(C) $3/4$

(D) 2