

109年公務人員特種考試警察人員、
一般警察人員考試及109年特種考試
交通事業鐵路人員考試試題

考試別：鐵路人員考試

等別：高員三級考試

類科別：電力工程、電子工程

科目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：可以使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50 分)

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、利用 Laplace Transform 解下列微分方程式，其中方程式的等號右邊為一具有時間延遲的一個單位脈衝 (unit impulse) 輸入，求 $y(t)$ 。

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = \delta(t-1); \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0 \quad (10 \text{ 分})$$

二、試求 $\oint_{c: |z|=2} \frac{z}{1+z^2}$ ，其中 c 代表圍線積分的路徑為逆時鐘方向。(10 分)

三、 $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ ，若 $-\pi < x < \pi$ 且 $f(x+2\pi) = f(x)$ 求此函數之傅立葉級數 (Fourier Series)。(15 分)

四、若 $f(x) = x^7 - 2x^2 + x - 2I$ ， $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ ， I 為單位矩陣，求 $f(A) = ?$
(15 分)

乙、測驗題部分：(50 分)

代號：4704

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 設向量 $\mathbf{u} = (3, -2, -5)$ ， $\mathbf{v} = (1, 4, -4)$ ， $\mathbf{w} = (0, 3, 2)$ ，則 $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ 之值為何？其中運算元 $\times$ 表示為外積 (cross product)， $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ 則表示為 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的內積 (inner product)。

(A) 49

(B) 56

(C) 84

(D) 92

- 2 已知 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 為向量空間 (vector space) $\mathbf{V}$ 中的兩個非零向量 (nonzero vector)，下列敘述何者不恆真？
 (A) 若 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 為正交 (orthogonal)，則 $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$
 (B) $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$
 (C) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$
 (D) 若 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 的夾角為 θ ，則 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta$
- 3 令 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 均為 n 階方陣，則下列何者恆成立？
 (A) $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ (B) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T$ (C) $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA})$ (D) $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$
- 4 下列方陣 $\mathbf{A}$ ，何者存在矩陣 $\mathbf{P}$ 滿足 $\mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{I}$ ，且 $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$ 為對角矩陣？
 (A) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (B) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (D) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$
- 5 下列何者非與矩陣 $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 互為相似矩陣 (similar matrices)？
 (A) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -3 & 10 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$
- 6 假設函數 $F(s) = \ln \frac{s^2 + 1}{(s-1)^2}$ 的逆拉氏轉換 (inverse Laplace transform) 為 $f(t) = \frac{1}{t}(a \cos t + b \sin t)$ ，其中 a, b 是常數，求 $a+b=?$
 (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 2
- 7 計算複數函數 $f(z) = (1+i)^{1-i}$ 為：
 (A) $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}\right) \right]$
 (B) $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}\right) \right]$
 (C) $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}\right) \right]$
 (D) $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}\right) \right]$
- 8 給定一複數函數為 $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$ ，假設 C 為沿著逆時針方向繞圓周 $|z-1|=1$ 之路徑，則線積分 $\int_C f(z) dz = ?$
 (A) 0 (B) πi (C) $2\pi i$ (D) $3\pi i$
- 9 求 $f(z) = \frac{2iz - \cos(z)}{z^3 + z}$ 在 $z = -i$ 的殘餘值 (residue) 為：
 (A) 0 (B) $1 + \frac{1}{2} \cos(i)$ (C) $-1 + \frac{1}{2} \cos(i)$ (D) $-1 - \frac{1}{2} \cos(i)$
- 10 求解積分方程式 $y(t) = t + \int_0^t y(\tau) \sin(t-\tau) d\tau$ 為：
 (A) $y(t) = \frac{1}{3}t^3 + 2t$ (B) $y(t) = \frac{1}{6}t^3$ (C) $y(t) = \frac{1}{6}t^3 + t$ (D) $y(t) = \frac{1}{3}t^3 + t$

- 11 下列何者不是 $y(x)$ 的線性 (linear) 微分方程式？ (其中 $y' = \frac{dy}{dx}$)
- (A) $x^3 y' + 3x^2 y = \frac{1}{x}$ (B) $x^2 y' + 2xy = \sinh 5x$ (C) $y' = 1 + y^2$ (D) $xy' = 2y + x^3 e^x$
- 12 下列那一個函數組合可構成微分方程式 $y^{(4)} - y = 0$ 的解之基底 (basis of solutions)？ (其中 $y^{(4)} \equiv \frac{d^4 y}{dx^4}$)
- (A) $\cos x, \sin x, x, x^{-1}$ (B) e^x, e^{-x}, x, x^{-1}
(C) $e^x, e^{-x}, \cosh x, \sinh x$ (D) $\cos x, \sin x, \cosh x, \sinh x$
- 13 試問微分方程式 $3y' = 5x^3 - \frac{3y}{x}, x > 0$ 的解為何？
- (A) $y = \left(\frac{1}{3}\right)x^4 + \frac{c}{3x}$ (B) $y = \left(\frac{1}{3}\right)x^4 - \frac{c}{3x}$ (C) $y = \left(\frac{1}{3}\right)x^3 + \frac{c}{3x}$ (D) $y = \left(\frac{1}{3}\right)x^2 - \frac{c}{3x}$
- 14 假設微分方程式 $y'' + xy' - 2y = e^{5x}$ ；其中 $y(0) = 2$ 且 $y'(0) = 1$ ，若 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 為此微分方程式之級數解，求 a_4 的值為何？
- (A) $\frac{11}{12}$ (B) $\frac{13}{12}$ (C) $\frac{25}{24}$ (D) $\frac{29}{24}$
- 15 函數 $f(t)$ 之拉氏轉換 (Laplace transform) 為 $L\{f(t)\}$ ，令 $L\{f(t)\} = \frac{-1}{(s-1)(s-2)}$ ，則 $f(t)$ 可能為何？
- (A) $e^t + e^{2t}$ (B) $-e^t - e^{2t}$ (C) $-e^t + e^{2t}$ (D) $e^t - e^{2t}$
- 16 求 $f(t) = |\sin(t)|$ 之拉氏轉換式為：
- (A) $\frac{1 + e^{-\pi s}}{(s^2 + 1)(1 - e^{-\pi s})}$ (B) $\frac{1 + e^{-\pi s}}{(s^2 + 1)(1 + e^{-\pi s})}$ (C) $\frac{1 + e^{-\pi s}}{(s^2 - 1)(1 - e^{-\pi s})}$ (D) $\frac{1 - e^{-\pi s}}{(s^2 + 1)(1 - e^{-\pi s})}$
- 17 已知函數 $f(t)$ 的傅立葉轉換 (Fourier transform) 存在，且其傅立葉轉換標記為 $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f(t)\}$ ，下列何者恆真？
- (A) 若 $f(t)$ 在 $t = 4$ 為連續，則 $f(4) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-4)dt$ ，其中 $\delta(t)$ 為單位脈衝訊號 (unit impulse signal)
(B) $f(t-4)$ 的傅立葉轉換為 $e^{j4\omega} F(\omega)$
(C) $e^{j4t} f(t)$ 的傅立葉轉換為 $F(\omega + 4)$
(D) $e^{3t} f(t)$ 的傅立葉轉換為 $F(\omega - 3)$
- 18 從 72 的所有正因數中，隨機選取一數，此數值大於 15 的機率為何？
- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{5}{12}$ (D) $\frac{7}{12}$
- 19 假設兩個隨機變數 (X, Y) ，其聯合機率分布 (joint probability distribution) 為 $f(x, y) = \frac{x+y}{30}$ ，其中 $x = 0, 1, 2, 3; y = 0, 1, 2$ ，試算出機率 $P(X > Y)$ 為何？
- (A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{17}{30}$ (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{7}{10}$
- 20 隨機變數 X, Y 的聯合機率密度函數為 $f(x, y) = \begin{cases} 8xy, & 0 < x \leq y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，則 X 與 Y 之期望值分別為：
- (A) $8/15, 4/5$ (B) $8/15, 4/15$ (C) $4/5, 8/15$ (D) $4/15, 8/15$