

105年公務人員特種考試司法人員、法務部
調查局調查人員、國家安全局國家安全情報
人員、海岸巡防人員及移民行政人員考試試題

考試別：國家安全情報人員

等別：三等考試

類科組：電子組

科目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：可以使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

- (一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、某剛體 B (rigid body) 以固定之角速度 $\vec{\omega}$ 旋轉，已知該剛體上之任一點 $P(x, y, z)$ 之瞬時速度 (instant velocity) 可利用公式 $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ 求得，其中 $\vec{r}$ 為 P 點之位置向量 (position vector)，試求出 $\nabla \times \vec{v}$ 與 $\vec{\omega}$ 之關係。（15 分）

二、設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2.5 & 0.5 \\ 0.5 & 2.5 \end{bmatrix}$ ，求：

- (一)其特徵值 (eigenvalues) 及其特徵向量 (eigenvectors)。（5 分）
(二)以(一)之解對角化此矩陣。（5 分）

三、求解 $y'' - 4y = -7e^{2x} + x$ ； $y(0) = 1$ ， $y'(0) = 3$ ，其中 $y' \equiv \frac{dy}{dx}$ ， $y'' \equiv \frac{d^2y}{dx^2}$ 。（15 分）

四、二維隨機變數 X 與 Y 的結合機率密度函數 (joint probability density function) 為

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{6(x+y^2)}{5}, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(marginal probability density function) $f_X(x)$ 與 $f_Y(y)$ 。（10 分）

乙、測驗題部分：（50 分）

代號：6608

- (一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆 在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 設 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，求矩陣 e^{At} 的行列式的值 = ? 其中 t 為實數。

(A) 0

(B) 1

(C) -1

(D) $e^{2t} - e^{-2t}$

2 下列何者為以兩向量 $u = (-3, 4, 1)$ 及 $v = (0, -2, 6)$ 為相鄰兩邊所圍出的平行四邊形的面積？

(A) $\sqrt{1036}$

(B) $\sqrt{1039}$

(C) $\sqrt{1046}$

(D) $\sqrt{1049}$

3 求點 $(1, -4, -3)$ 與平面 $2x - 3y + 6z = -1$ 之最短距離值為何？

(A) $3/7$ (B) 3 (C) $3/49$ (D) $5/7$

4 下列何者是矩陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ 的特徵向量？

(A) $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(B) $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(C) $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(D) $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

5 令 $N(A)$ 代表矩陣 A 之零空間 (null space)。當 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ，則下列何者屬於 $N(A)$ ？

(A) $(1, 1, -1)^T$ (B) $(1, 0, 1)^T$ (C) $(2, 1, 4)^T$ (D) $(1, 0, 0)^T$

6 令 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 為一複數級數 (complex series)，且已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L$ ，則下列敘述何者錯誤？

(A) 若 $L < 1$ ，則此級數收斂(B) 若 $L < 1$ ，則此級數絕對收斂 (absolutely convergent)(C) 若 $L > 1$ ，則此級數發散(D) 若 $L = 1$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ ，則此級數收斂

7 有一矩陣 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ，求 $A^{99} = ?$

(A) $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(B) $33 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(C) $\left(\frac{1}{3}\right)^{99} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

8 下列何者為 $e^{-z+i}=1-i$ 之解？其中 $i=\sqrt{-1}$ 。

(A) $z = -\ln(\sqrt{2}) + i\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$ (B) $z = \ln(\sqrt{2}) + i\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$ (C) $z = -\ln(\sqrt{2}) - i\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$ (D) $z = \ln(\sqrt{2}) - i\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$

9 令 z 與 w 為複數，下列敘述何者錯誤？

(A) $\overline{(z+w)} = \bar{z} + \bar{w}$ (B) $\overline{zw} = -zw$ (C) $|z| = |\bar{z}|$ (D) $z\bar{z} = |z|^2$

10 假設 C 為沿著逆時針方向繞圓周 $|z-i|=2$ ，試求積分 $\oint_C \frac{1}{(z^2+4)} dz$ 為何？

(A) 0 (B) $-\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) 2π

11 下列何者是 $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$ 的通解？

(A) $e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$ ，其中 c_1, c_2 為常數

(B) $e^{-x}[(c_1 + c_2 x) \cos 2x + (c_3 + c_4 x) \sin 2x]$ ，其中 c_1, c_2, c_3, c_4 為常數

(C) $c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{2x}$ ，其中 c_1, c_2, c_3 為常數

(D) $c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{2x}$ ，其中 c_1, c_2, c_3 為常數

12 若 $f(t)$ 之拉氏轉換 (Laplace transform) 為 $L\{f(t)\}=F(s)$ ，下列何者錯誤？

(A) $L\{e^{at} \cos \omega t\} = \frac{s-a}{s^2 + \omega^2}$

(B) $L\{t^5\} = \frac{5!}{s^6}$

(C) $L\{\frac{t}{2\beta} \sin \beta t\} = \frac{s}{(s^2 + \beta^2)^2}$

(D) $L\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$ ，其中 $u(t)$ 為單位步階函數 (unit step function)

13 函數 $f(t) = (t^2 + 1)u(t-2)$ 之拉氏轉換 (Laplace transform) 為何？其中 $u(t)$ 為單位步階函數 (unit step function)。

(A) $\left[\frac{s^2+2}{s^3}\right]e^{-2s}$ (B) $\left[\frac{(s-2)^2+2}{(s-2)^3}\right]e^{-2s}$ (C) $\left[\frac{5s^2+4s+2}{s^3}\right]e^{-2s}$ (D) $\left[\frac{s^2+2s+2}{s^3}\right]e^{-2s}$

14 下列何者是 $y' = \frac{y+x}{y-x}, y(0) = -2$ 的解？

- (A) $y^2 - 2xy - x^2 = 4$ (B) $y^2 = 2x^2 \ln \frac{1}{|x|}$ (C) $x^2 + xy + y^2 = 4$ (D) $y^2 - x^2 = 4$

15 $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n-1)} \right)$ 之收斂值為下列何者？

- (A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 2

16 若 $y = ax^m + bx^n$ 為 $x^2 y'' + 4xy' - 4y = 0$ 之解，且 $m \neq n$ ，則 $m+n$ 之值為何？其中 a, b, m, n 為常數， $y' \equiv \frac{dy}{dx}$ ， $y'' \equiv \frac{d^2 y}{dx^2}$ 。

- (A) -4 (B) -3 (C) 1 (D) 4

17 連續隨機變數 X, Y, Z 之結合機率密度函數 (joint probability density function) 為

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = \begin{cases} c \cdot x^2 e^{-x(2+y+z)}, & \text{if } x, y, z > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \text{ c 值為何？}$$

- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8

18 某工廠有 3 台機器 B_1, B_2, B_3 分別生產 30%、45% 和 25% 的產品。已知 3 台機器的產品中分別有 2%、3% 和 2% 的瑕疵品。假設現在任意選取一個產品，它是瑕疵品的機率為何？

- (A) 0.07 (B) 0.0245 (C) 0.0135 (D) 0.021

19 假設隨機變數 X 的機率密度函數 (probability density function) 為 $f(x)$ 及累積分布函數 (cumulative distribution function) 為 $F(x)$ 。已知 $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{2}}, & \text{當 } x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，下列敘述何者錯誤？

- (A) $f(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}$ ，當 $x > 0$ (B) $P(X \geq 3) = e^{-\frac{3}{2}}$ (C) $P(X < 2) = 1 - e^{-1}$ (D) $P(X = 2) = \frac{1}{2} e^{-1}$

20 若 $\mu(x, y)$ 為微分方程式 $y' = \frac{N(x, y)}{M(x, y)}$ 的積分因子 (integrating factor)，則 $\mu(x, y)$ 須滿足下列何種條件？

- (A) $\frac{\partial \mu(x, y) M(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \mu(x, y) N(x, y)}{\partial x} = 0$ (B) $\frac{\partial \mu(x, y) M(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \mu(x, y) N(x, y)}{\partial y} = 0$
(C) $\frac{\partial \mu(x, y) M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \mu(x, y) N(x, y)}{\partial x}$ (D) $\frac{\partial \mu(x, y) M(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \mu(x, y) N(x, y)}{\partial y}$