

等 別：高等考試

類 科：電機工程技師

科 目：工程數學（包括線性代數、微分方程、複變函數與機率）

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、考慮一個三階微分方程式 $y''' + Ay'' + By' + Cy = 0$ ，其中 A 、 B 、 C 都是實數。已知 $y_1(x) = e^{-2x} \sin 3x$ 和 $y_2(x) = e^{-3x}$ 都是這個微分方程式的解。求 $y''' + Ay'' + By' + Cy = 1$ 的通解。（20 分）

二、 X 為常態分布（Normal Distribution）的隨機變數，其機率密度函數（Probability Density Function）為 $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ 。定義隨機變數 Y 為 $Y = 2X - 4$ 。試求：

（每小題 5 分，共 20 分）

(一) X^2 的期望值（Expected Value） $E[X^2]$

(二) $E[X^5]$

(三) $E[Y]$

(四) $E[Y^2]$

三、考慮一個複變函數（Complex Function） $f(z) = f(x + iy) = e^{-y} \cos x + ie^{-y} \sin x$ 。

(一) 找出 $f(z)$ 在複數平面可以微分的區域。（10 分）

(二) 求 $\frac{d}{dz} f(z)$ 。（10 分）

四、以矩陣方式，解右列聯立方程式 $\begin{cases} 3x + 2y + z = 7 \\ x - y + 3z = 3 \\ 5x + 4y - 2z = 1 \end{cases}$ 。（10 分）

五、考慮二個聯立方程式 $A: \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 4x - y + z = 0 \\ 5x + y - 2z = 0 \end{cases}$ ， $B: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ -2x + y - 2z = 0 \end{cases}$ 。那一個聯立方程式

有不全為 0 的解？也就是至少會有一個解 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ？請適當說明。（10 分）

六、求逆時針方向的線積分 $\oint_C (x - 3y)dx + (4x + y)dy$ ，其中 C 路徑是一個四個頂點分別是 $(-2, 0)$ ， $(3, 0)$ ， $(3, 2)$ ， $(-2, 2)$ 的長方形的邊界（Boundary）。（20 分）