

等 別：三等考試
類 科：電力工程、電子工程
科 目：工程數學
考試時間：2小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50分）

- (一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、假設 X 和 Y 為兩個獨立 (independent) 的隨機變數 (random variables)，且 X 和 Y 之平均值 (mean) 均為零，變異數 (variance) 為 σ^2 的高斯分布 (Gaussian distribution)。隨機變數 X 和 Y 的聯合機率密度函數 (joint pdf) 為：

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right], \quad -\infty < x, y < \infty。$$

定義兩個新的隨機變數 R 及 Θ 如下：假設 $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 及 $\Theta = \tan^{-1}(Y/X)$ ，使得 $X = R\cos\Theta$ ，且 $Y = R\sin\Theta$ 。請證明隨機變數 R 的機率密度函數為

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right], \quad 0 \leq r < \infty。 (6分)$$

二、(一)假設 z 為一複數，求所有的 z 使得 $\cos z = \sqrt{2}$ 。(4分)

(二)假設 z 為一複數，計算 $\oint_C \frac{2z^3 + z^2 + 4}{z^4 + 4z^2} dz$ ，其中積分路徑 C 為圓 $|z - 2| = 4$ 之順時針 (clockwise) 方向圓周 (circle)。(4分)

三、(一)已知一 RC 電路系統可由微分方程式 (differential equation) $\frac{d}{dt}y(t) + 5y(t) = 5x(t)$ 表示，其中 $x(t)$ 為輸入，且 $y(t)$ 為輸出。假設 $x(t) = (3/5)e^{-2t}u(t)$ ，且初始條件 (initial condition) $y(0^-) = -2$ ，求 $y(t)$ 。(8分)

(二)已知一訊號 $x(t)$ 的單邊拉普拉斯轉換 (unilateral Laplace transform) 為：

$$X(s) = e^{-2s} \frac{2s^2 + 1}{s(s+2)^2}$$

請求該訊號 $x(t)$ 的初值 (initial value) 及終值 (final value)。(8分)

四、(一)(a)求 k 使得 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ ，其中 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ， $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ ， $\mathbf{b}=\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \\ k \end{pmatrix}$ ；(7分)

(b)如(a)小題，求矩陣 $\mathbf{A}$ 的行列式值 (determinant)。(3分)

(二)請求以下線性系統的解 $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 + x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 + 3x_2 - x_3 \end{cases}$ ，其中 $x_1(0)=1$ ， $x_2(0)=0$ 及

$x_3(0)=1/2$ 。(10分)

乙、測驗題部分：(50分)

代號：7343

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共20題，每題2.5分，須用2B鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 對稱矩陣 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ，其對角化矩陣 (diagonal matrix) $\mathbf{D}=\mathbf{PAP}^{-1}$ ，其中 $\mathbf{P}$ 是正交矩陣，求 $\mathbf{D}=?$

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

2 矩陣 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ ，令 $\det \mathbf{A}=6$ 和 $\det \mathbf{B}=2$ ，求 $\det \mathbf{AB}^{-1}=?$

(A)12

(B)6

(C)3

(D)0

3 設 $\mathbf{a}$ 為常數向量 (constant vector)， $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ ， $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$ ，下列何者錯誤？

(A) $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$

(B) $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 0$

(C) $\nabla \times \mathbf{r} = 0$

(D) $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = \mathbf{a}$

4 求 $\int_{(1,1)}^{(2,4)} 2xydx + x^2dy = ?$

(A)10

(B)15

(C)20

(D)25

5 矩陣 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ，求 $e^{\mathbf{A}t}=?$

(A) $\begin{pmatrix} 2e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 2e^{-t} \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 2e^t & 0 \\ 0 & 2e^{-t} \end{pmatrix}$

6 下列矩陣何者的秩 (rank) 等於2。

(A) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \\ 7 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

7 下列那一個是適合的積分因子 (integrating factor)，乘上它以後，將使微分方程式 $(x+y)dx + x \ln(x)dy = 0$ 變成正合 (exact)？

(A) x (B) 3 (C) $\frac{1}{x}$ (D) $\frac{1}{x^2}$

8 微分方程式 $y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}$ ，其中 $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$ 。以拉普拉斯轉換 (Laplace transform) 求解後得到 $Y(s) = \frac{2(s-c)^d + 2}{(s-a)^b}$ ，則下列何者錯誤？

(A) $a+b+c+d=15$ (B) $a+b+c-d=7$ (C) $a-b-c+d=-1$ (D) $-a+b-c+d=-3$

9 設 $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 為函數 $f(x) = x^3$ ， $-\pi < x < \pi$ 之傅立葉級數 (Fourier series)，其中 a_0 , a_n , b_n 為常數，下列何者正確？

(A) $a_0 + b_n \neq 0$ (B) $a_0 + a_n \neq 0$ (C) $a_0 \cdot b_n \neq 0$ (D) $a_0 \neq 0$

10 設 $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x}$ 為微分方程 $y''' + ay'' + by' + cy = 0$ 的通解 (general solution)，其中 a, b, c, c_1, c_2, c_3 為常數，下列何者正確？

(A) $a = -1$ (B) $b = -1$ (C) $c = -1$ (D) $a + b + c = -1$

11 求積分方程 $f(t) = \cos t + \int_0^t e^{-\tau} f(t-\tau) d\tau$ 的解。

(A) $1 - \sin t$ (B) $1 + \sin t$ (C) $\cos t - \sin t$ (D) $\cos t + \sin t$

12 令連續隨機函數 X 具有機率密度函數 $f(x) = \begin{cases} kx^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ ，求其變異數 (variance) σ^2 。(其中 k 為常數)

(A) $\frac{1}{40}$ (B) $\frac{3}{40}$ (C) $\frac{1}{80}$ (D) $\frac{3}{80}$

- 13 令連續二維隨機變數 X 和 Y 具有機率密度函數 $f(x, y) = \begin{cases} kxy, & 0 \leq x \leq 1 \text{ and } 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ ，求

其機率 $P(X > 0.25, Y > 0.5)$ 。(其中 k 為常數)

- (A) $\frac{5}{8}$ (B) $\frac{9}{16}$ (C) $\frac{45}{64}$ (D) $\frac{75}{128}$

- 14 求複變函數積分 $\oint_C \left(\frac{\cosh z}{(z-\pi)^3} - \frac{\sin^2 z}{(2z-\pi)^3} \right) dz$ ，其中積分路徑 C 為逆時鐘方向繞圓周 $|z| = 3$ 。

- (A) $\frac{\pi}{4}i$ (B) $-\frac{\pi}{4}i$ (C) $\frac{\pi}{2}i$ (D) $-\frac{\pi}{2}i$

- 15 求複變函數積分 $\oint_C \frac{z}{(z+1)(z^2+1)} dz$ ，其中積分路徑 C 為逆時鐘方向繞橢圓周 $16x^2 + y^2 = 4$ 。

- (A) $2\pi i$ (B) $-2\pi i$ (C) πi (D) $-\pi i$

- 16 複變函數 $f(z) = z^{24} - 3z^{20} + 4z^{12} - 5z^6$ ，求 $f\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = ?$

- (A) $5i$ (B) $4i$ (C) $3i$ (D) $2i$

- 17 z 為一複數，若 Γ 是平面中一個包含原點 $z=0$ 之封閉路徑， $\oint_{\Gamma} \frac{\cos(z)}{z} dz = ?$

- (A) 0 (B) $-i2\pi$ (C) 2π (D) $i2\pi$

- 18 曲線 C 為平面上一個正向簡單封閉路徑，則 $\oint_C x \cos(2y) dx - x^2 \sin(2y) dy = ?$

- (A) $4x \sin(2y)$ (B) $2x \sin(2y)$
(C) 0 (D) $\frac{1}{2}(x^2 \cos(2y) + x^2 \cos(2y))$

- 19 令一曲線 C 為 $x=t^2, y=-t, z=t^2, 0 \leq t \leq 1$ ，則 $\int_C x^2 dx - yz dy + e^z dz = ?$

- (A) $e + \frac{1}{12}$ (B) $e - \frac{1}{12}$ (C) $e - \frac{11}{12}$ (D) $e + \frac{11}{12}$

- 20 下表所示為 x 及 y 機率質量函數 (probability mass function, PMF)，則 X 與 Y 之共變異數

$\text{COV}(X, Y) = ?$

	$x_1=1$	$x_1=0$	$x_1=-1$
$y_1=1$	0	1/4	1/4
$y_2=-1$	1/4	1/4	0

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) -1 (D) 1